

Oefeningen Numerieke Analyse 2024-25 (Eerste Zit)

1) Zij $M \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ van de vorm $\left(\frac{A}{O_n} \middle| \frac{B}{D}\right)$ met $A, B, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Je mag aannemen dat M een LU-decompositie bezit. (3 pt)

- Herschrijf het algoritme om stelsels van de vorm $Mx = b$ op te lossen via LU-factorisatie voor M van deze vorm. Benadruk de verschillen tussen dit algoritme voor een algemene $2n \times 2n$ matrix.
- Schrijf een algortime voor dit probleem op in pseudocode.
- Bepaal het aantal rekenkundige bewerkingen voor dit algoritme, vergelijk dit opnieuw met de variant voor een algemene $2n \times 2n$ matrix.

2) Eigenwaardenproblemen. (3,5 pt)

a. $A = \begin{pmatrix} -7 & 2 & 0 \\ 3 & 15 & 3 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, bewijs dat voor de eigenwaarden λ van A geldt dat $5 \leq |\lambda| \leq 17$ zonder de eigenwaarden effectief te berekenen.

b. Zij $v \in \mathbb{R}^3$ met $V = I_3 - 2 \frac{vv^T}{v^T v}$, bepaal de eigenwaarden van matrix V .

c. Je kreeg nog een extra gegeven matrix B (met ingevulde coëfficiënten zoals A , maar de matrix zelf is helaas verloren gegaan) en moest vector v bepalen zodat $AV = B$.

We denken: $B = \begin{pmatrix} -7 & 2 & 0 \\ -5 & -13 & 8 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

3) Approximatie. (3 pt)

- a. Zij $f(x) = x^3 + x$. Bepaal de veelterm p_2 van graad hoogstens 2 die $\int_{-1}^1 (f(x) - p_2(x))^2$ minimaliseert.
- b. Zij $f(x) = (x - 5) \cdot ((x - 5)^2 + 3)$ bepaal een interval $[a, b]$ waarop $\max_{x \in [a, b]} |f(x)|$ minimaal is onder alle monische veeltermen van graad drie. Bepaal daarbovenop ook deze maximale waarde.

4) Beschouw Runge-Kutta formule $y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{6}k_2 + \frac{2}{3}k_3$ met $k_1 = f(t_i, y_i), k_2 = f(t_i + h, y_i + k_1), k_3 = f(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{4}k_1 + \frac{1}{4}k_2)$. (3 pt)

- a. Stel een Butcher schema voor deze Runge-Kutta formule op. Hoe kunnen we aan dit schema zien dat deze formule expliciet is?
- b. Bewijs dat deze methode minstens van orde 2 is.
- c. Schrijf een formule voor y_1 in functie van h, λ en y_0 voor differentiaalvergelijking $y' = \lambda y$ door gebruik te maken van de gegeven Runge-Kutta formule.