Oplossingen oefeningen statistiek: 08

1 Oefening 1

We schatten eerst de standaardafwijking aan de hand van de vier gegeven samples

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\overline{(X-\mu)^2}} = 0.86 \tag{1}$$

Het aantal sigma afwijking van het punt $x = 7.3$ is dus (we gebruiken de t-notatie, aangezien σ ongekend is, en $n = 4$ klein).

$$t = \frac{x-\mu}{\hat{\sigma}} = \frac{7.3-4.9}{0.86} = 2.79 \tag{2}$$

Deze afwijking is redelijk groot, dus laten we eens een kijkje nemen met welke confidentie dit overeenkomt. In tabel 7.2 vind je een aantal confidentielimieten voor de t-verdeling. Voor $n = 4$ zien we dat de 97.5% CL bereikt wordt voor $t = 2.776$. In ons geval kunnen we dus met iets meer dan 97.5% confidentie de nulhypothese verwerpen dat $x = 7.3$ bij dezelfde verdeling hoort.

2 Oefening 2

1. In dit geval kunnen we het aantal correct geraden kaarten x beschouwen als een grootheid die verdeeld is volgens een binomiaal met $n = 50$, en een ongekende p. De nulhypothese is dat de helderziende gewoon gokt ($p = 50$), en dat hij slechts bij toeval meer dan de helft van de kaarten correct heeft geraden. We schatten $\hat{p}$ aan de hand van onze meting, en de variantie op x onder de nulhypothese $p = 0.5$.

$$\hat{p} = 32/50 = 0.64 \tag{3}$$
$$V(x) = np(1-p) = 12.5 \tag{4}$$
$$\sigma_x = 3.54 \tag{5}$$

   De meting $x = 32$ ligt dus 1.98σ van het nulresultaat 25. Dit komt overeen met 97.61% confidentie.

2. Om 99% te bereiken, hebben we een afwijking van 2.33σ nodig, of $x = 25 + 2.33 \cdot 3.54 = 33.25$, dus 34 kaarten.

3 Oefening 3

We hebben 25 functiewaarden (de binwaarden). Het aantal metingen speel hier geen rol; enkel de fout op elk van de punten waaraan we fitten wordt hierdoor bepaald. Indien we een curve willen fitten, dan zijn er 3 parameters.

$$g(x) = Nf\mathcal{G}(x;\mu,\sigma) + N(1-f)\mathcal{U} \tag{6}$$

Met $\mathcal{G}$ een Gauss en $\mathcal{U}$ een uniforme (is een constante i.f.v. x), beiden genormaliseerd over het gebied dat door de bins beslagen wordt. De factor $N = 1000$, en zorgt ervoor dat onze curve genormaliseerd is volgens het aantal metingen. Nf is dan het verwachte aantal metingen dat van de gaus afkomstig is, en $N(1-f)$ het aantal afkomstig van de uniforme achtergrond. Het aantal vrijheidsgraden is dus $25 - 3 = 22$.

4 Oefening 4

1. Om onze intuïtie een beetje te helpen, fitten we een constante functie van de vorm $f(x) = c$ aan deze waarden. De kleinste kwadraten schatter voor c is simpelweg het gemiddelde van de gemeten temperaturen.
$$\hat{c} = \bar{t} = 10.12 \tag{7}$$
Het aantal vrijheidsgraden 9 en met een fout van $\sigma_t = 0.2$ K is
$$\chi^2 = \sum_i \left(\frac{t_i - \hat{c}}{\sigma_t} \right)^2 = 14.90 \tag{8}$$
We doen een χ^2-test, en zoeken met welke confidentielimiet dat dit overeenkomt in tabel 7.3. Voor 9 vrijheidsgraden, lezen we af dat α tussen 0.1 en 0.05 zal liggen, en vooral dicht bij 0.1 (14.90 light het dichtst bij 14.68). Numeriek is de exacte waarde $\alpha = 0.094$. We kunnen dus met 90% percent confidentie zeggen dat de temperatuur niet constant is tussen de verschillende metingen.

2. In het eerste puntje hebben we een geoptimaliseerde waarde voor c uitgerekend. In dit geval fitten we geen parameters, maar is c gewoon gegeven. In dit geval is $\chi^2 = 15.00$ een klein beetje groter, en is het aantal vrijheidsgraden $n = 10$. Als we weer kijken naar tabel 7.3, zien we dat de kritische waarde voor $\alpha = 0.1$ niet bereikt wordt. Numeriek kan je vinden dat $\alpha = 0.13$. We hebben in dit geval dus slechts 87% confidentie.

5 Oefening 5

1. Om te bepalen in welke mate de twee varianties hetzelfde zijn, voeren we een Fisher-Snedecor-of F-test uit.
$$f_2 = n_2 - 1 = 7 \tag{9}$$
$$f_1 = n_1 - 1 = 10 \tag{10}$$
$$F = \frac{\hat{V}_2}{\hat{V}_1} = \frac{s_2^2}{s_1^2} = \frac{0.2837}{0.1848} = 1.54 \tag{11}$$
We kunnen de confidentielimieten aflezen uit tabel 8.2. Let hier wel bij op dat de grootste variantie in de teller moet staan, dus f_1 en f_2 zijn omgewisseld in ons geval. We kunnen zien dat de kritische waarde voor $\alpha = 0.1$ bereikt wordt als $F = 2.41$. In dit geval kan het dus best dat de varianties gelijk zijn.

2. De geldigheid van de nulhypothese (de gemiddelde diktes van de 2 geproduceerde staalkabels zijn gelijk) kunnen we bestuderen aan de hand van een t-test (zie sectie 8.4.2). Om een gemeenschappelijk variantie S^2 voor beide steekproeven te berekenen passen we formule 8.14 toe.
$$S^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = 0.2255 \tag{12}$$
$$S = 0.4749 \tag{13}$$
Onze t-variabele wordt dan (formule 8.13)
$$t = \frac{\bar{x_1} - \bar{x_2}}{S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = 2.949 \tag{14}$$

In tabel 7.2 lezen we voor onze $11 + 8 - 2 = 17$ vrijheidsgraden af dat $1 - \alpha > 0.99$ voor het tweezijdige confidentie-interval. We kunnen dus met meer dan 99% confidentie de nul-hypothese verwerpen, die zegt dat het verschil op de gemiddelde diktes van de kabels puur statistisch is. Het verschil is dus niet enkel te wijten aan de fout op de dikte van een kabel.