Examen Projectieve Meetkunde, 25 januari 2023

Deel I: Algemene projectieve meetkunde

Vraag 1. Onderstel dat V en W twee vectorruimten zijn van dimensie $n \geq 3$ over de respectievelijke velden $\mathbb{F}$ en $\mathbb{F}'$. Onderstel eveneens dat α een bijectie is tussen de puntenverzameling van $\mathrm{PG}(V)$ en de puntenverzameling van $\mathrm{PG}(W)$. Toon aan dat α uitgebreid kan worden tot een collineatie van $\mathrm{PG}(V)$ op $\mathrm{PG}(W)$ als en slechts als α elke drie collineaire punten van $\mathrm{PG}(V)$ afbeeldt op drie collineaire punten van $\mathrm{PG}(W)$.

Vraag 2. Formuleer en bewijs de stelling van de volledige vierzijde.

Vraag 3. Onderstel dat V een 3-dimensionale vectorruimte is over een veld $\mathbb{F}$, en dat β een polariteit is van het projectief vlak $\mathrm{PG}(V)$. Wat verstaat men onder het begrip pooldriehoek t.o.v. β? Toon aan dat er steeds zo'n pooldriehoek bestaat. Toon aan dat ten opzichte van een goed gekozen basis in V de polariteit β voorgesteld wordt door $[a_0\, a_1\, a_2]^T = A \cdot [x_0\, x_1\, x_2]^T$, met A een niet-singuliere diagonaalmatrix en θ een automorfisme van $\mathbb{F}$ zodat $\theta^2 = 1$ en $A^\theta = A$.

Deel II: Projectieve vlakken

Vraag 4.

(a) Definieer het begrip *projectief vlak*. Wat is een *automorfisme* van een projectief vlak, en wat is een *isomorfisme* tussen projectieve vlakken? Kunnen twee projectieve vlakken van verschillende orde isomorf zijn? (Motiveer je antwoord.)

(b) Onderstel dat φ een automorfisme is van een affien vlak $\mathcal{A}$. Induceert φ altijd een automorfisme van het projectieve vlak $\mathcal{P}$ geassocieerd aan $\mathcal{A}$? (Bewijs je antwoord.)

(c) Onderstel dat T een groep is, I een verzameling met $|I| \geq 3$, en $\{T_i \mid i \in I\}$ een verzameling deelgroepen van T zodat $\cup_{j \in I} T_j = T$. Onderstel ook dat voor alle $i, j \in I$ met $i \neq j$, $T_i T_j = T$ en $T_i \cap T_j = \{1\}$. Onderstel nu dat $g, h \in T$, en beschouw linkse nevenklassen gT_u en hT_v, met $u, v \in I$ en $u \neq v$. Bewijs dat deze nevenklassen juist één element gemeen hebben.

Deel III: Oefeningen

Vraag 5. Stel dat $\pi_1, \dots, \pi_6$ zes verschillende vlakken zijn in $\mathrm{PG}(3, \mathbb{F})$ zodat de volgende verzamelingen van drie vlakken elk een gemeenschappelijke intersectierechte hebben:

$$\{\pi_1, \pi_2, \pi_3\}, \{\pi_1, \pi_4, \pi_5\}, \{\pi_3, \pi_5, \pi_6\} \text{ en } \{\pi_2, \pi_4, \pi_6\}.$$

Bovendien hebben geen vier van deze vlakken een gemeenschappelijke intersectierechte. Bewijs dat de vlakken $\pi_1, \dots, \pi_6$ een gemeenschappelijk punt bezitten.

Vraag 6. Beschouw een niet-singuliere kegelsnede $\mathcal{K}$ in $\mathrm{PG}(2, \mathbb{C})$ en een punt P dat niet op $\mathcal{K}$ ligt.

a) Bewijs dat alle rechten door P snijlijnen of raaklijnen zijn aan $\mathcal{K}$.

b) Beschouw een rechte l door P, die $\mathcal{K}$ snijdt in punten P_1 en P_2. Als $P_1 = P_2$, dan stellen we $R = P_1 = P_2$. Als $P_1 \neq P_2$, dan definiëren we R als het punt op l dat harmonisch toegevoegd is aan P ten opzichte van P_1 en P_2. Bepaal de meetkundige plaats van de punten R als we de rechte l door P laten variëren.

c) Zij l een snijlijn aan $\mathcal{K}$ door P. Noem de snijpunten P_1 en P_2 en zij l_i de raaklijn aan $\mathcal{K}$ in P_i, $i = 1, 2$. Bewijs dat het snijpunt S van l_1 en l_2 op de poollijn van P ligt.

d) Zij m_1 en m_2 twee verschillende snijlijnen aan $\mathcal{K}$ door P, met snijpunten P_1 en P_2 op m_1 en snijpunten Q_1 en Q_2 op m_2. Zij S_1 het snijpunt van $\langle P_1, Q_1 \rangle$ met $\langle P_2, Q_2 \rangle$ en S_2 het snijpunt van $\langle P_1, Q_2 \rangle$ met $\langle P_2, Q_1 \rangle$. Bewijs dat de snijpunten S_1 en S_2 op de poollijn van P liggen.