Examen Projectieve Meetkunde, 26 augustus 2022

Deel I: Algemene projectieve meetkunde

Vraag 1. Formuleer en bewijs de stelling van Desargues voor projectieve vlakken over velden.

Vraag 2. Onderstel dat $\mathbb{F}$ een veld is van karakteristiek 2, en dat $a_{00}, a_{01}, a_{02}, a_{11}, a_{12}, a_{22}$ elementen zijn van $\mathbb{F}$. Geef (met bewijs) een nodige en voldoende voorwaarde waaraan de veldelementen $a_{00}, \ldots, a_{22}$ moeten voldoen opdat het kwadratisch polynoom $F(X_0, X_1, X_2) = \sum_{0 \leq i \leq j \leq 2} a_{ij} X_i X_j$ absoluut reduciebel zou zijn.

Vraag 3. Onderstel dat V een 4-dimensionale vectorruimte is over een veld $\mathbb{F}$ en dat κ de Klein correspondentie is tussen de verzameling rechten van $\mathrm{PG}(V)$ en de punten van $\mathrm{PG}(\bigwedge^2 V)$.

(a) Toon aan dat een punt $\langle \chi \rangle$ van $\mathrm{PG}(\bigwedge^2 V)$ tot het beeld van κ behoort a.s.a. er een vector $\bar{v} \in V \setminus \{\bar{o}\}$ bestaat zodat $\chi \wedge \bar{v} = 0$.

(b) Toon aan, gebruik makend van (i), dat de Plücker coördinaten van een rechte van $\mathrm{PG}(V)$ aan een kwadratische vergelijking voldoen, en bepaal deze vergelijking.

Deel II: Projectieve vlakken

Vraag 4.

(a) Definieer het begrip *affien vlak*. Wat is een *automorfisme* van een affien vlak?

(b) Beschouw een projectief vlak $\mathcal{P}$ dat gecoördinatiseerd wordt aan de hand van een verzameling R. Indien (R, T) de corresponderende ternaire ring is, bewijs dan de volgende eigenschap:

- voor alle $a, b, c, d \in R$ met $a \neq c$ bestaat er juist één koppel $(x, y) \in R^2$ waarvoor $T(a, x, y) = b$ en $T(c, x, y) = d$.

(c) Onderstel dat T een groep is, I een verzameling met $|I| \geq 3$, en $\{T_i \mid i \in I\}$ een verzameling deelgroepen van T zodat $\cup_{j \in I} T_j = T$. Onderstel ook dat voor alle $i, j \in I$ met $i \neq j$, $T_i T_j = T$ en $T_i \cap T_j = \{1\}$. Onderstel nu dat $g, h \in T$, en beschouw linkse nevenklassen gT_u en hT_v, met $u, v \in I$ en $u \neq v$. Bewijs dat deze nevenklassen juist één element gemeen hebben.

Deel III: Oefeningen

Vraag 5. Zij β een polariteit in $\mathrm{PG}(n, \mathbb{F})$, $n \geq 3$. Veronderstel dat er drie absolute, snijdende, niet-concurrente rechten bestaan ten opzichte van deze polariteit. Toon aan dat $n \geq 5$.

Vraag 6. Een homologie ϕ in $\mathrm{PG}(2, \mathbb{F})$, $\mathrm{kar}(\mathbb{F}) \neq 2$, met centrum P en as ℓ noemen we harmonisch als er een punt $R \neq P$ niet op ℓ bestaat zodat $\phi(R)$ harmonisch toegevoegd is aan R t.o.v. P en $\langle P, R \rangle \cap \ell$.

(i) Beschouw een harmonische homologie ϕ met as ℓ en centrum P. Toon aan dat $\phi(Q)$ harmonisch toegevoegd is aan Q t.o.v. P en $\langle P, Q \rangle \cap \ell$, met Q een willekeurig punt, niet op ℓ en verschillend van P.

(ii) Beschouw een harmonische homologie ϕ_1 met as ℓ en centrum P_1 en een homologie ϕ_2 met as ℓ en centrum P_2. Toon aan dat $\phi_1\phi_2$ (eerst ϕ_1 toepassen en dan ϕ_2) een elatie is als en slechts als ϕ_2 harmonisch is.