Examen Projectieve Meetkunde, 26 januari 2022

Deel I: Algemene projectieve meetkunde

Vraag 1. Onderstel dat V een vectorruimte is over een veld $\mathbb{F}$ met $n+1 = \dim(V) \geq 2$. Toon aan dat de group $\mathsf{P\Gamma L}(V)$ transitief werkt op de verzameling der geraamten van $\mathrm{PG}(V)$ en de doelgroep van $\mathsf{P\Gamma L}(V)$ die al de elementen van een gegeven geraamte fixeert isomorf is met $Aut(\mathbb{F})$.

Vraag 2. Onderstel dat V een driedimensionale vectorruimte is over een veld $\mathbb{F}$, en dat a_{ij} en a'_{ij} elementen zijn van $\mathbb{F}$ voor alle $i,j \in \{0,1,2\}$ met $i \leq j$. Onderstel dat ten opzichte van een bepaalde basis van V de vergelijkingen $\sum_{0 \leq i \leq j \leq 2} a_{ij} X_i X_j = 0$ en $\sum_{0 \leq i \leq j \leq 2} a'_{ij} X_i X_j = 0$ éénzelfde niet-ledige absoluut irreduciebele kegelsnede C voorstellen. Toon dan aan dat er een $k \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ bestaat zodat $a'_{ij} = k \cdot a_{ij}$ voor alle $i,j \in \{0,1,2\}$ met $i \leq j$.

Vraag 3. Onderstel dat V een 4-dimensionale vectorruimte is over een veld $\mathbb{F}$ en dat κ de Klein correspondentie is tussen de verzameling rechten van $\mathrm{PG}(V)$ en de punten van $\mathrm{PG}(\bigwedge^2 V)$. Toon aan dat een punt $\langle \chi \rangle$ van $\mathrm{PG}(\bigwedge^2 V)$ tot het beeld van κ behoort a.s.a. er een vector $\bar{v} \in V \setminus \{\bar{o}\}$ bestaat zodat $\chi \wedge \bar{v} = 0$.

Deel II: Projectieve vlakken

Vraag 4.

(a) Definieer het begrip *projectief vlak*. Wat is een *automorfisme* van een projectief vlak?

(b) Beschouw een projectief vlak $\mathcal{P}$ dat gecoördinatiseerd wordt aan de hand van een verzameling R. Indien (R,T) de corresponderende ternaire ring is, bewijs dan de volgende eigenschap:

- voor alle $a,b,c,d \in R$ met $a \neq c$ bestaat er juist één $x \in R$ waarvoor $T(x,a,b) = T(x,c,d)$.

(c) Onderstel dat T een groep is, I een verzameling met $|I| \geq 3$, en $\{T_i \mid i \in I\}$ een verzameling deelgroepen van T zodat $\cup_{j \in I} T_j = T$. Onderstel ook dat voor alle $i,j \in I$ met $i \neq j$, $T_i T_j = T$ en $T_i \cap T_j = \{1\}$. Onderstel nu dat $g \in T$, en beschouw een linkse nevenklasse hT_r, met $r \in I$ en $h \in T$, waarvoor $g \notin hT_r$. Bewijs dat er juist één linkse nevenklasse xT_k bestaat (met $k \in I$ en $x \in T$) die g bevat en disjunct is met hT_r.

Deel III: Oefeningen

Vraag 5. Beschouw de Klein kwadriek $\mathcal{Q}$ met vergelijking $X_0X_1 + X_2X_3 + X_4X_5 = 0$ in $\mathrm{PG}(5, \mathbb{F})$ en beschouw de Latijnse en Griekse vlakken van $\mathcal{Q}$.

(a) Bestaat er een automorfisme van $\mathrm{PG}(5, \mathbb{F})$ dat $\mathcal{Q}$ fixeert, elk Latijns vlak op een Grieks vlak afbeeldt en elk Grieks vlak op een Latijns vlak afbeeldt? Geef een voorbeeld en motiveer, of bewijs dat dit niet bestaat.

(b) Bestaat er een automorfisme van $\mathrm{PG}(5, \mathbb{F})$ verschillend van de identieke afbeelding, dat $\mathcal{Q}$ fixeert, elk Latijns vlak op een Latijns vlak afbeeldt en elk Grieks vlak op een Grieks vlak afbeeldt? Geef een voorbeeld en motiveer, of bewijs dat dit niet bestaat.

Vraag 6. Een deelvlak Π' van een projectief vlak Π is een deelverzameling van de punten van dit vlak, die zelf een projectief vlak vormen met dezelfde incidentie relaties. *Een rechte van* Π' *is dus een rechte van* Π *die minstens 2 punten van* Π' *bevat.* Beschouw een projectief vlak Π van orde n en daarin een projectief deelvlak Π' van orde m, met $m < n$.

(a) Hoeveel punten zijn er in Π die op geen enkele rechte van Π' liggen? Vereenvoudig indien mogelijk de uitdrukking die je bekomt.

(b) Bewijs dat $n = m^2$ of $n \geq m^2 + m$.

(c) Stel $n = m^2$. Hoeveel rechten zijn er in Π die geen enkel punt van Π' bevatten?