TM/ITF- Stappenplan oefeningen met oscillaties

STAP 1: Bepaal de veralgemeende coördinaten en veralg. snelheden

Bepaal dus $q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots \dot{q}_n$.

STAP 2: Bepaal T en V

Houd voor de potentiële energie V rekening met of er zwaartekracht inwerkt op het systeem en of er een veer aan verbonden is. Indien beide toepasbaar zijn wordt V = $V_{veer} + V_{grav}$

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\vec{r}_i}}$$

$$\boxed{V_{\text{veer}} = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2}$$

$$\boxed{V_{\text{grav}} = mgh}$$

Uit T en V volgt natuurlijk ook de lagrangiaan L via formule $\boxed{L = T - V}$

STAP 3: Zoek de minima van de potentiaal (= evenwichtspunten)

Deze minima en dus evenwichtspunten vinden we via onderstaande vergelijking.

$$\boxed{Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k} = 0}$$

STAP 4: Stel de Hessiaan op en zoek stabiele evenwichtspunten

De elementen van Hessiaan [V] zijn: $\boxed{[V]_{kl} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial q_l} = [V]_{lk}}$ Merk op dat [V] symmetrisch is.

We gaan na of de gevonden evenwichtspunten uit stap 3 ook stabiele evenwichtspunten zijn:

$$\boxed{\text{Evenwichtspunt } (q_1^0, \dots q_n^0) \text{ stabiel } \Leftrightarrow \det[V(q_1^0, \dots q_n^0)] = 0}$$

STAP 5: Geef de Hessiaan in de stabiele evenwichtspunten

Vul de coördinaten van de gevonden stabiele evenwichtspunten in in [V].

STAP 6: Leid de massamatrix af uit de kinetische energie

We vinden de elementen van [T] via formule $\boxed{T = \frac{1}{2}\sum_{k,l}[T]_{kl}\dot{q}_k\dot{q}_l}$ We vonden T in stap 2.

De elementen van de massamatrix [T] zijn dus juist de coëfficiënten van T als homogene veelterm van de tweede graad in de veralgemeende snelheden, specifieker is $[T]_{kl}$ is de coëfficiënt van $\dot{q}_k\dot{q}_l$.

STAP 7: Geef de massamatrix in de stabiele evenwichtspunten

STAP 8: Zoek de frequenties ω van de oscillaties

Het eigenwaardeprobleem $[V(q_1^0, \dots q_n^0)] \cdot [a] = \omega^2[T(q_1^0, \dots q_n^0)] \cdot [a]$ brengt ons tot de vergelijking

$$\boxed{\det[V(q_1^0, \dots q_n^0) - \omega^2 T(q_1^0, \dots q_n^0)] = 0}$$

De oplossingen voor deze vergelijking in ω zijn juist de frequenties die we zoeken.