

Examen Statistiek en Gegevensverwerking

Fysica en Sterrenkunde 2de Bach

AJ 2022-2023, 2e zit

1 Theorie

1. (4pt) - Stel een familie van waarschijnlijkheidsdichtheden $P(X; \vec{\theta})$ van één toevallige variabele X en m parameters $\vec{\theta} = \{\theta_1 \dots \theta_m\}$. Stel ook een set van N waarnemingen $\vec{x} = \{x_1 \dots x_N\}$ van X .

(a) In deze context, beschrijf in detail de verbanden en verschillen tussen waarschijnlijkheidsdichtheid en *likelihood*.

(b) Stel dat $\hat{\theta}$ een *efficiënte* schatter van $\vec{\theta}$ is. Wat is de exacte betekenis ervan? Bespreek (zonder het volledig te bewijzen) een krachtig theorema over de nauwkeurigheid van wo'n *efficiënte* (en onbevooroordeelde) schatter. Verklaar elke term die je hier gebruikt.

(c) Leg de maximale (log-)liekelihood schattingsmethode uit. Wat zijn de belangrijkste voor- en nadelen? Geef een interpretatie (met afbeelding) van de log-likelihood distributie voor $m = 1$ en $m = 2$.

2. (4pt) - Stel dat je twee types van evenementen A en B hebt, die elk volgens een Poisson verdeling voorkomen.

(a) Bewijs dat de som van de twee onafhankelijke variabelen opnieuw een Poisson verdeling geeft. Wat is de parameter van deze nieuwe Poisson verdeling?

(b) Wat is de verdeling van het aantal evenementen van type A (x_A) indien het totale aantal evenementen N gekend is? Verklaar elke term die in de uitdrukking voorkomt.

2 Oefeningen

1. (4pt) - We willen het gedrag van studenten fysica en chemie vergelijken door hun aanwezigheid bij het eerste college wiskunde te registreren. 88 van de 101 studenten fysica zijn aanwezig, tegen 73 van de 115 studenten chemie. Kunnen we beweren, met een confidentie niveau 95%, dat de aanstaande natuurkundigen meer gemotiveerd zijn dan de scheikundigen?

2. (4pt) - Stel een satelliet heeft 5 zonnepanelen die elk een levensduur T hebben. De toevallige variabele T wordt goed beschreven door een exponentiële verdeling met gemiddelde levensduur $\tau = 5$ jaar.

(a) Hoe lang kunnen we garanderen met 90% confidentie dat alles in perfecte staat blijft (waarbij alle zonnepanelen functioneren)?

(b) De satelliet kan operationeel blijven zolang tenminste 2 van de panelen functioneren. Wat is de kans dat de satelliet na 8 jaar nog operationeel is?

3. (4pt) - Om de minuut wordt de relatieve kwikhoogte van een thermometer met een nauwkeurigheid van 0.5mm gemeten.

tijd t (min)	0	1	2	3	4	5	6	7
hoogte y (cm)	-0.910	-0.749	-0.512	-0.111	0.203	0.481	0.852	0.880

De theorie stelt dat de hoogte met de tijd t gegeven is door $y(t) = \sin(\omega t + \phi)$.

(a) Bepaal ω en ϕ én de fouten erop.

(b) Hoe goed komen theorie en gegevens overeen? Kwantificeer indien mogelijk en bespreek het resultaat.

Hint: $\frac{d}{dx} \arcsin x = (1 - x^2)^{-1/2}$