

# Theoretische Mechanica

Inleiding tot de Theoretische Fysica — Herwerkte cursus

Beau Vandendriessche

2025 – 2026

## Inhoudsopgave

<b>Wiskundige achtergrond</b>	<b>7</b>
Afgeleiden van functies . . . . .	7
Driedimensionale ruimte en vectorrekening . . . . .	8
De kettingregel in drie dimensies . . . . .	10
<b>Mechanica van één deeltje (G1.1)</b>	<b>10</b>
Beweging, impuls en de wetten van Newton . . . . .	10
Behoudswetten voor één deeltje . . . . .	11
Behoud van impuls . . . . .	11
Behoud van draaimoment . . . . .	11
Behoud van energie . . . . .	12
<b>Mechanica van meerdere deeltjes (G1.2)</b>	<b>13</b>
De wetten van Newton voor een systeem van deeltjes . . . . .	13
Het zwaartepunt en behoud van totale impuls . . . . .	14
Behoud van draaimoment voor een systeem . . . . .	14
Kinetische energie van een systeem . . . . .	16
Behoud van energie voor een systeem . . . . .	16
<b>Bindingen (G1.3)</b>	<b>17</b>
Wat zijn bindingen en waarom zijn ze problematisch? . . . . .	17
Classificatie van bindingen . . . . .	18
Veralgemeende coördinaten . . . . .	18
<b>Het principe van d’Alembert en de Lagrangevergelijkingen (G1.4)</b>	<b>19</b>
Opzet . . . . .	19
Het principe van d’Alembert . . . . .	20
Eliminatie van de reactiekrachten . . . . .	20
Overgang naar veralgemeende coördinaten . . . . .	20
Veralgemeende krachten . . . . .	21
Herschrijven van de traagheidstermen . . . . .	21
De Lagrangevergelijkingen (eerste vorm) . . . . .	22
De Lagrangevergelijkingen (tweede vorm): conservatieve krachten . . . . .	22

<b>Eenvoudige toepassingen van het Lagrange-formalisme (G1.6)</b>	<b>23</b>
Één deeltje in 3D met Cartesische coördinaten . . . . .	24
Één deeltje in het 2D vlak met poolcoördinaten . . . . .	24
De machine van Atwood . . . . .	25
Kraaltje dat glijdt over een roterende staaf . . . . .	26
<b>Hoofdstuk 2</b>	<b>27</b>
Inleiding: de configuratieruimte . . . . .	27
<b>Het principe van Hamilton (G2.1)</b>	<b>27</b>
De actiefunctie . . . . .	27
<b>Variatieanalyse (G2.2)</b>	<b>28</b>
Het variationeel probleem in één dimensie . . . . .	28
Afleiding van de Euler-Lagrangevergelijking . . . . .	29
Voorbeeld: het kortste pad tussen twee punten . . . . .	30
<b>De Lagrangevergelijking uit het principe van Hamilton (G2.3)</b>	<b>30</b>
Uitbreiding naar meerdere dimensies . . . . .	30
Koppeling aan het principe van Hamilton . . . . .	31
<b>Voordelen van de variationele formulering (G2.5)</b>	<b>31</b>
Vrijheid in de keuze van de Lagrangiaan . . . . .	31
<b>Behoudswetten en symmetrie-eigenschappen (G2.6)</b>	<b>33</b>
Eerste integralen van de beweging . . . . .	33
Veralgemeend moment en cyclische coördinaten . . . . .	33
Voorbeeld 1: translatie-invariantie en impulsbehoud . . . . .	34
Voorbeeld 2: rotatie-invariantie en draaimomentsebehoud . . . . .	35
<b>Behoud van energie (G2.7)</b>	<b>36</b>
De Lagrangiaan is tijdsafhankelijk . . . . .	36
De Hamiltoniaan en energiebehoud . . . . .	36
De stelling van Euler en de interpretatie van de Hamiltoniaan . . . . .	37
Wanneer is energiebehoud niet geldig? Tijdsafhankelijke bindingen . . . . .	38
<b>Intermezzo: de structuur van het Lagrange-probleem</b>	<b>40</b>
Het algemene mechanische probleem . . . . .	40
Rol van veralgemeende coördinaten en de Lagrangevergelijkingen . . . . .	40
<b>Hoofdstuk 3: Centrale krachtproblemen</b>	<b>41</b>
Inleiding . . . . .	41
<b>Reductie van het twee- naar het éénlichaamsprobleem (G3.1)</b>	<b>41</b>
Opzet en motivatie . . . . .	41
Keuze van veralgemeende coördinaten . . . . .	41
De Lagrangiaan in de nieuwe coördinaten . . . . .	42
Het effectieve éénlichaamsprobleem . . . . .	42
<b>Bewegingsvergelijkingen en eerste integralen (G3.2)</b>	<b>43</b>

Centrale kracht en sferische symmetrie . . . . .	43
De beweging is vlak . . . . .	43
Overgang naar vlakke poolcoördinaten . . . . .	44
Eerste integraal 1: behoud van draaimoment . . . . .	45
Bewegingsvergelijking voor $r$ . . . . .	45
Eerste integraal 2: behoud van energie . . . . .	46
Formele oplossing: $r(t)$ en $\theta(t)$ . . . . .	46
<b>Equivalent ééndimensionaal probleem en classificatie van orbitalen (G3.3)</b>	<b>47</b>
Algemene eigenschappen uit behoudswetten . . . . .	47
De fictieve potentiaal . . . . .	47
Klassificatie van orbitalen via de fictieve potentiaal . . . . .	48
<b>Differentiaalvergelijking voor de orbitaal (G3.5)</b>	<b>50</b>
De orbitaalvorm $r(\theta)$ . . . . .	50
De substitutie $u = 1/r$ . . . . .	50
Wanneer is een orbitaal gesloten? . . . . .	51
<b>Het Kepler-vraagstuk (G3.7)</b>	<b>51</b>
Het gravitatieveld en de fictieve potentiaal . . . . .	51
De eccentriciteit . . . . .	52
Keerpunten: perihelion en aphelion . . . . .	52
Integratie van de orbitaalvergelijking . . . . .	53
Interpretatie: kegelsneden . . . . .	53
Eigenschappen van de elliptische baan . . . . .	53
<b>De Laplace-Runge-Lenz vector (G3.9)</b>	<b>54</b>
Een extra behouden grootte . . . . .	54
Bewijs dat $\mathbf{A}$ behouden is . . . . .	54
Richting en grootte van $\mathbf{A}$ . . . . .	55
Tellen van onafhankelijke behouden grootheden . . . . .	55
<b>Hoofdstuk 4: Beweging van starre lichamen — Kinematica</b>	<b>56</b>
Inleiding . . . . .	56
<b>Vrijheidsgraden van een star lichaam (G4.1)</b>	<b>56</b>
Hoeveel vrijheidsgraden heeft een star lichaam? . . . . .	56
Beschrijving van de oriëntatie: twee assenstelsels . . . . .	57
Richtingscosinussen . . . . .	57
De orthogonaliteitsrelaties en de transformatiematrix . . . . .	58
<b>Orthogonale transformaties (G4.2)</b>	<b>58</b>
Transformatiematrix . . . . .	58
Passieve en actieve interpretatie . . . . .	59
Voorbeeld: rotatie om de $z$ -as . . . . .	59
<b>Eigenschappen van de transformatiematrix (G4.3)</b>	<b>60</b>
Groepseigenschap . . . . .	60
De determinant: $\pm 1$ en de groep $SO(3)$ . . . . .	60

<b>De Euler-hoeken (G4.4)</b>	<b>60</b>
Motivatie: een handige parametrisatie van $SO(3)$ . . . . .	60
De drie opeenvolgende rotaties . . . . .	61
De transformatiematrix als product van drie rotatiematrices . . . . .	61
<b>Stelling van Euler over de beweging van een star lichaam (G4.6)</b>	<b>62</b>
Formulering . . . . .	62
Bewijs: elke $SO(3)$ -matrix heeft eigenwaarde $+1$ . . . . .	63
De rotatiehoek uit het spoor van de matrix . . . . .	64
<b>Eindige rotaties van het assenstelsel (G4.7)</b>	<b>64</b>
De rotatieformule . . . . .	64
Verband tussen rotatiehoek en Euler-hoeken . . . . .	66
<b>Infinitiesimale rotaties (G4.8)</b>	<b>67</b>
Vereenvoudiging voor kleine hoeken . . . . .	67
Antisymmetrie van infinitesimale rotatiematrices . . . . .	67
Infinitiesimale rotaties zijn commutatief . . . . .	67
<b>Tijdsafgeleide van vectorcomponenten in het vaste en roterende assenstelsel (G4.9)</b>	<b>68</b>
Het probleem . . . . .	68
De ogenblikkelijke rotatievector $\boldsymbol{\omega}$ . . . . .	68
Het fundamentele verband tussen tijdsafgeleiden . . . . .	68
De componenten van $\boldsymbol{\omega}$ in termen van de Euler-hoeken . . . . .	70
<b>Het Coriolis-effect (G4.10)</b>	<b>73</b>
Situatieschets: een roterend referentiestelsel . . . . .	73
Verband tussen snelheden in de twee stelsels . . . . .	73
Verband tussen versnellingen . . . . .	73
De effectieve kracht voor de meeroterende waarnemer . . . . .	73
De twee schijnkrachten: centrifugaal en Coriolis . . . . .	74
<b>Hoofdstuk 5: Beweging van starre lichamen — dynamica</b>	<b>76</b>
Inleiding . . . . .	76
<b>Draaimoment en kinetische energie bij rotatie om een punt (G5.1)</b>	<b>76</b>
Splitsing van translatie en rotatie . . . . .	76
Het draaimoment in termen van de rotatievector . . . . .	77
De traagheidstensor: definitie via componenten . . . . .	77
<b>De traagheidstensor en het traagheidsmoment (G5.3)</b>	<b>78</b>
De kinetische energie van een roterend star lichaam . . . . .	78
Het traagheidsmoment rond een willekeurige as . . . . .	79
De traagheidstensor als tweede-orde tensor . . . . .	79
De stelling van de parallelle assen (stelling van Steiner) . . . . .	80
<b>Hoofdasen van een star lichaam (G5.4)</b>	<b>81</b>
Transformatiegedrag van de traagheidstensor . . . . .	81
Diagonalisatie: de hoofdasen . . . . .	81

Voorbeeld: . . . . .	83
<b>De Euler-bewegingsvergelijkingen (G5.5)</b>	<b>84</b>
Van het inertiaalstelsel naar het lichaamsvaste stelsel . . . . .	84
Keuze van het lichaamsvaste assenstelsel langs de hoofdassen . . . . .	84
De Euler-bewegingsvergelijkingen . . . . .	84
<b>De massieve symmetrische tol (G5.7)</b>	<b>85</b>
Beschrijving van het systeem . . . . .	85
De gyroscoop . . . . .	86
<b>Hoofdstuk 6: Normaaltrillingen</b>	<b>87</b>
Inleiding . . . . .	87
<b>Formulering van het probleem: kleine trillingen rond evenwicht (G6.1)</b>	<b>87</b>
Het systeem en de Lagrangiaan . . . . .	87
Evenwichtsposities . . . . .	87
Kleine uitwijkingen en nieuwe coördinaten . . . . .	88
Kwadratische benadering van de potentiële energie . . . . .	89
Kwadratische benadering van de kinetische energie . . . . .	89
De Lagrangiaan in de harmonische benadering . . . . .	90
<b>De eigenwaardevergelijking en normaaltrillingen (G6.2)</b>	<b>91</b>
De trillingsansatz . . . . .	91
Eigenschappen van de potentiaalmatrix $[V]$ . . . . .	91
Eigenschappen van de massamatrix $[T]$ . . . . .	92
Reductie tot een gewoon eigenwaardeprobleem . . . . .	92
Eigenwaarden zijn niet-negatief: reële frequenties . . . . .	93
Normaaltrillingen . . . . .	93
<b>Algemene oplossing voor kleine trillingen (G6.3)</b>	<b>93</b>
Superpositie van normaaltrillingen . . . . .	93
Bepaling van amplitudes en fasen uit beginvoorwaarden . . . . .	94
<b>Toepassing: de lineaire triatomische molecule (G6.4)</b>	<b>95</b>
Beschrijving van het systeem . . . . .	95
De matrices $[T]$ en $[V]$ . . . . .	95
Het veralgemeend eigenwaardeprobleem . . . . .	96
De drie normaaltrillingfrequenties . . . . .	97
<b>Hoofdstuk 8: Het Hamilton-formalisme</b>	<b>98</b>
Inleiding: van Lagrange naar Hamilton . . . . .	98
<b>De bewegingsvergelijkingen van Hamilton (G8.1)</b>	<b>98</b>
Vertrekpunt: het Lagrange-formalisme . . . . .	98
De veralgemeende momenten . . . . .	98
De Hamiltoniaan: definitie via de Legendre-transformatie . . . . .	99
Ableiding van de canonische vergelijkingen van Hamilton . . . . .	99
De canonische vergelijkingen van Hamilton . . . . .	100
De Hamiltoniaan als energie . . . . .	100

---

De Legendre-transformatie in breder perspectief . . . . .	101
<b>Draaiboek voor het opstellen van de Hamiltoniaan (G8.1)</b>	<b>101</b>
Stapsgewijze procedure . . . . .	101
Generiek geval: kwadratische kinetische energie . . . . .	102
Toepassing 1: één deeltje in Cartesische coördinaten . . . . .	102
Toepassing 2: één deeltje in sferische coördinaten . . . . .	103
<b>Relatie tussen de Hamiltoniaan en het Lagrange-formalisme</b>	<b>103</b>
Equivalentie van de twee formuleringen . . . . .	103
Tijdsafgeleide van de Hamiltoniaan . . . . .	104
<b>Belang en uitbreidingen van het Hamilton-formalisme</b>	<b>104</b>
Voordelen en toepassingen . . . . .	104
Samenvatting: Lagrange vs. Hamilton . . . . .	105

## Wiskundige achtergrond

Vooraleer we de fysica ingaan, zetten we de wiskundige notaties en begrippen op een rijtje die doorheen de hele cursus gebruikt worden. Alles wat hier staat is een opfrissing of aanvulling van bekende begrippen, geen nieuw materiaal.

### Afgeleiden van functies

**Functies van één variabele.** Een reëelwaardige functie van één variabele is een afbeelding

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x).$$

We onderstellen altijd dat functies “braaf” zijn, d.w.z. voldoende vaak afleidbaar, zonder pathologische gevallen.

De *eerste afgeleide* van  $f$  in het punt  $x$  is gedefinieerd als de limiet van de differentiequotient:

$$\frac{df}{dx}(x) = f'(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \epsilon) - f(x)}{\epsilon}.$$

Wanneer de variabele de tijd  $t$  is, gebruiken we ook de Newtoniaanse notatie met een punt boven de functie:  $\dot{f}(t) \equiv \frac{df}{dt}(t)$ .

De *tweede afgeleide* is de afgeleide van de afgeleide:

$$\frac{d^2f}{dx^2}(x) = f''(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[ \frac{df}{dx}(x + \epsilon) - \frac{df}{dx}(x) \right].$$

Bij tijdsafhankelijke functies schrijven we  $\ddot{f}(t) \equiv \frac{d^2f}{dt^2}(t)$ .

**Functies van meerdere variabelen.** Een reëelwaardige functie van  $n$  variabelen is een afbeelding

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

De *partiële afgeleide* naar de variabele  $x_i$  meet hoe  $f$  verandert als enkel  $x_i$  varieert, terwijl alle andere variabelen vastgehouden worden:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = \lim_{\epsilon_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + \epsilon_i, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\epsilon_i}.$$

De *productregel* geldt ook voor partiële afgeleiden: voor twee functies  $f$  en  $g$  is

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x_i} = f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot g.$$

**Tweede-orde partiële afgeleiden en symmetrie.** Men kan tweemaal partieel afleiden, ook naar twee verschillende variabelen:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = \lim_{\epsilon_j \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon_j} \left[ \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_j + \epsilon_j, \dots, x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) \right].$$

Een belangrijke eigenschap voor braaf gedragende functies is dat de volgorde van afleiden niet uitmaakt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

**Vectorwaardige functies van meerdere variabelen.** Meer algemeen kan men een vectorwaardige functie beschouwen:

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)).$$

Elke component  $f_j$  gedraagt zich als een scalaire functie van  $n$  variabelen, dus de partiële afgeleide is

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = \lim_{\epsilon_i \rightarrow 0} \frac{f_j(x_1, \dots, x_i + \epsilon_i, \dots, x_n) - f_j(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\epsilon_i}.$$

## Driedimensionale ruimte en vectorrekening

**Het klassieke beeld van de ruimte.** In de klassieke (Newtoniaanse) mechanica spelen fysische processen zich af in een driedimensionale Euclidische ruimte. De tijd is een universele parameter die gelijkmatig voortschrijdt voor alle waarnemers. Dit beeld verandert in de relativiteitstheorie, maar het blijft een uitstekende benadering voor alle aardse macroscopische fenomenen waarbij we geen extreme snelheden of massadichtheden tegenkomen.

We kiezen een oorsprong  $O$  en een orthogonaal assenstelsel  $Oxyz$  met eenheidsvectoren  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  respectievelijk langs de  $x$ -,  $y$ - en  $z$ -richting. Een punt  $P$  in de ruimte heeft Cartesische coördinaten  $(x, y, z)$  (soms ook genoteerd  $x_i$  met  $i = 1, 2, 3$ ). De bijbehorende plaatsvector  $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$  is dan

$$\mathbf{r} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z.$$

**Vectorgrootheden en bewerkingen.** Een algemene vectorgrootheid  $\mathbf{A}$  heeft componenten  $(A_x, A_y, A_z)$ :

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z.$$

De componenten van een vector transformeren op dezelfde manier als de plaatsvector  $\mathbf{r}$  onder een verandering van basisvectoren (dit is eigenlijk de definitie van een vector).

Er zijn twee centrale bewerkingen op vectoren:

1. **Scalair product** (inwendig product): geeft een getal terug,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta_{AB} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A},$$

waarbij  $\theta_{AB}$  de hoek is tussen  $\mathbf{A}$  en  $\mathbf{B}$ .

2. **Vectorproduct** (uitwendig product): geeft een vector terug met componenten

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_x = A_y B_z - A_z B_y,$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_y = A_z B_x - A_x B_z,$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_z = A_x B_y - A_y B_x.$$

Belangrijke eigenschappen van het vectorproduct:

- Anti-commutatief:  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ , en bijgevolg  $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$ .
- Grootte:  $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta_{AB}$ .
- De resulterende vector staat loodrecht op zowel  $\mathbf{A}$  als  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0, \quad \mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0.$$

**Scalaire en vectorfuncties.** Een *scalaire functie* kent aan elk punt van de ruimte een getal toe:

$$f(\mathbf{r}) = f(x, y, z) \in \mathbb{R}.$$

Een *vectorfunctie* (of vectorveld) kent aan elk punt van de ruimte een vector toe:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F_x(x, y, z) \mathbf{e}_x + F_y(x, y, z) \mathbf{e}_y + F_z(x, y, z) \mathbf{e}_z.$$

**De nabla-operator en zijn toepassingen.** De *nabla-operator* is een symbolische differentiaaloperator:

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Men kan deze operator op drie manieren laten inwerken:

1. **Gradiënt** van een scalaire functie  $f(\mathbf{r})$ : dit geeft een vectorveld dat aangeeft in welke richting  $f$  het snelst toeneemt, en hoe snel:

$$(\nabla f)(\mathbf{r}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{r}) \mathbf{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{r}) \mathbf{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{r}) \mathbf{e}_z, \quad \text{of kortweg} \quad (\nabla f)_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

2. **Divergentie** van een vectorveld  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ : dit geeft een scalaire functie die aangeeft of er in een punt netto “flux” het volume uitstroomt:

$$(\nabla \cdot \mathbf{F})(\mathbf{r}) = \frac{\partial F_x}{\partial x}(\mathbf{r}) + \frac{\partial F_y}{\partial y}(\mathbf{r}) + \frac{\partial F_z}{\partial z}(\mathbf{r}).$$

3. **Rotor** (curl) van een vectorveld  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ : dit geeft een vectorveld dat de rotatie of “draaiing” van  $\mathbf{F}$  beschrijft:

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{F})_x(\mathbf{r}) &= \frac{\partial F_z}{\partial y}(\mathbf{r}) - \frac{\partial F_y}{\partial z}(\mathbf{r}), \\ (\nabla \times \mathbf{F})_y(\mathbf{r}) &= \frac{\partial F_x}{\partial z}(\mathbf{r}) - \frac{\partial F_z}{\partial x}(\mathbf{r}), \\ (\nabla \times \mathbf{F})_z(\mathbf{r}) &= \frac{\partial F_y}{\partial x}(\mathbf{r}) - \frac{\partial F_x}{\partial y}(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

**Identiteiten voor gradiënt, divergentie en rotor.** De volgende identiteiten zijn fundamenteel en worden later veelvuldig gebruikt:

$$\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0} \quad (\text{rotor van een gradiënt is altijd nul}), \quad (1)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0 \quad (\text{divergentie van een rotor is altijd nul}), \quad (2)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{F}, \quad (3)$$

waarbij de *Laplace-operator*  $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ .

Verder gelden de volgende productregels (voor een scalair veld  $f$  en vectorvelden  $\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{A}, \mathbf{B}$ ):

$$\nabla(fg) = (\nabla f)g + f(\nabla g), \quad (4)$$

$$\nabla \cdot (f\mathbf{G}) = (\nabla f) \cdot \mathbf{G} + f(\nabla \cdot \mathbf{G}), \quad (5)$$

$$\nabla \times (f\mathbf{G}) = (\nabla f) \times \mathbf{G} + f(\nabla \times \mathbf{G}), \quad (6)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}). \quad (7)$$

## De kettingregel in drie dimensies

De kettingregel is een essentieel hulpmiddel voor het afleiden van samengestelde functies. Stel dat een deeltje beweegt door de ruimte, zodat zijn positie op elk tijdstip  $t$  wordt gegeven door de positievector  $\mathbf{r}(t)$ , d.w.z. de drie coördinaten  $(x(t), y(t), z(t))$ .

Als  $f(\mathbf{r})$  een scalaire functie is die geëvalueerd wordt langs de baan van het deeltje, dan is  $f(\mathbf{r}(t))$  een functie van de tijd. De tijdsafgeleide hiervan volgt via de kettingregel:

$$\frac{d}{dt}f(\mathbf{r}(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{r}(t))\dot{x}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{r}(t))\dot{y}(t) + \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{r}(t))\dot{z}(t) = (\nabla f) \cdot \dot{\mathbf{r}}. \quad (8)$$

Dit elegante resultaat zegt: de tijdsverandering van  $f$  langs de baan is gelijk aan het scalair product van de gradiënt van  $f$  met de snelheidsvector. Dit resultaat zullen we meermaals gebruiken.

## Mechanica van één deeltje (G1.1)

### Beweging, impuls en de wetten van Newton

**Kinematische grootheden.** Beschouw een deeltje dat beweegt door de ruimte langs een baan  $\mathbf{r}(t)$ . In een gekozen coördinatenstelsel  $Oxyz$  heeft het deeltje op elk tijdstip  $t$  coördinaten  $(x(t), y(t), z(t))$ .

De *snelheidsvector* is de tijdsafgeleide van de positievector:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}.$$

De snelheidsvector is op elk moment gericht langs de raaklijn aan de baan. In Cartesische componenten:  $v_x = \dot{x}$ ,  $v_y = \dot{y}$ ,  $v_z = \dot{z}$ .

De *impuls* (of lineair moment) van het deeltje is gedefinieerd als

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v},$$

waarbij  $m$  de massa van het deeltje is. De impuls is eigenlijk een mate voor de hoeveelheid beweging van een deeltje.

**Inertiaalstelsels en de tweede wet van Newton.** Een coördinatenstelsel heet een *inertiaalstelsel* als een vrij deeltje (waarop geen krachten werken) daarin éénparig beweegt, d.w.z. de coördinaten variëren lineair in de tijd. Dit is een idealisatie, maar stelsels vastgehecht aan de aarde, de zon, of verre sterren bieden in de praktijk voldoende goede benaderingen.

In een inertiaalstelsel geldt de *tweede wet van Newton*: de totale kracht  $\mathbf{F}$  die op het deeltje inwerkt, is gelijk aan de tijdsafgeleide van de impuls:

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}).$$

Wanneer we de massa als tijdsonafhankelijk beschouwen (wat in de klassieke mechanica altijd het geval is), vereenvoudigt dit tot de bekende uitdrukking

$$\mathbf{F} = m\dot{\mathbf{v}} = m\mathbf{a},$$

waarbij  $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}$  de versnelling van het deeltje is.

**De bewegingsvergelijking.** De kracht die op het deeltje werkt, hangt over het algemeen af van de positie, de snelheid, en eventueel expliciet van de tijd:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), t) = m\ddot{\mathbf{r}}(t).$$

Dit is een stelsel van *drie gekoppelde tweede-orde differentiaalvergelijkingen* voor de onbekende functies  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ . Het oplossen van deze vergelijkingen geeft de volledige baan van het deeltje.

## Behoudswetten voor één deeltje

Behoudswetten zijn bijzonder krachtig: ze geven ons onmiddellijk informatie over de beweging, zonder de volledige differentiaalvergelijking te moeten oplossen.

### Behoud van impuls

Als er geen kracht inwerkt op het deeltje ( $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ ), dan volgt uit de tweede wet van Newton dat  $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0}$ , zodat  $\mathbf{p}$  constant is in de tijd. Dit is de eerste wet van Newton: een vrij deeltje beweegt éénparig rechtlijnig.

### Behoud van draaimoment

We definiëren twee nieuwe grootheden rond de oorsprong  $O$ :

- Het *draaimoment* (angulair moment):  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ .
  - **Intuïtief:** het draaimoment meet *hoeveel rotatiebeweging* een deeltje heeft t.o.v. het punt  $O$ . Het is de rotatie-analoga van impuls.
- Het *krachtmoment* (koppel):  $\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ .
  - **Intuïtief:** het krachtmoment meet *hoe sterk een kracht een rotatie wil veroorzaken* rond  $O$ . Het hangt af van zowel de grootte van de kracht als de afstand tot het punt  $O$ .

Het krachtmoment bepaalt de tijdsevolutie van het draaimoment. Dit volgt uit de tweede wet van Newton:

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) - \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}.$$

De laatste term  $\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} = m\mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$  is nul (een vector maal zichzelf via het vectorproduct is nul). We vinden dus:

$$\mathbf{N} = \dot{\mathbf{L}}.$$

### Stelling –

Als er geen krachtmoment inwerkt op het deeltje,  $\mathbf{N} = \mathbf{0}$ , dan is  $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{0}$  en het draaimoment  $\mathbf{L}$  is constant in de tijd.

## Behoud van energie

**Arbeid en kinetische energie.** Onder invloed van de kracht  $\mathbf{F}$  beweegt het deeltje langs een baan  $\mathbf{r}(t)$  tussen tijdstip  $t_1$  en  $t_2$ . De *arbeid* verricht door de kracht op het deeltje gedurende dit pad is gedefinieerd als de lijnintegraal:

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_{1 \rightarrow 2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Een lijnintegraal langs een pad wordt berekend via een parametrisatie van dat pad. De meest natuurlijke keuze hier is de tijdsparametrisatie  $\mathbf{r}(t)$ , waarbij het infinitesimale lijnstuk  $d\mathbf{s} = \dot{\mathbf{r}} dt = \mathbf{v} dt$ . De arbeid wordt dan:

$$\begin{aligned} W_{1 \rightarrow 2} &= \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt = m \int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} dt \\ &= \frac{1}{2} m \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(v^2) dt = T(t_2) - T(t_1), \end{aligned}$$

waarbij we in de laatste stap de *kinetische energie*  $T(t) = \frac{1}{2}mv^2$  hebben ingevoerd.

### Stelling – Arbeid-energiestelling

De arbeid verricht door de kracht op het deeltje, tussen twee punten van zijn baan, is gelijk aan het verschil in kinetische energie van het deeltje tussen die twee punten:

$$W_{1 \rightarrow 2} = T(t_2) - T(t_1).$$

**Conservatieve krachten en potentiële energie.** Een kracht heet *conservatief* als de verrichte arbeid  $W_{1 \rightarrow 2}$  voor elk mogelijk pad tussen de punten  $(t_1, \mathbf{r}_1)$  en  $(t_2, \mathbf{r}_2)$  dezelfde waarde heeft. Equivalente definitie: de kringintegraal langs een gesloten pad is nul:

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

Dit kan enkel als  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$  een tijdsafgeleide is van een of andere functie  $f(\mathbf{r}(t))$ :

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), t) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t)).$$

- Intuïtief: dit betekent dat de arbeid herleidt tot een verschil  $f(\mathbf{r}_2) - f(\mathbf{r}_1)$ , en dus enkel afhangt van begin- en eindpunt.
- Via de kettingregel geldt  $\frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t)) = \nabla f(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v}$ . Als dit gelijk is aan  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$  voor elke snelheid  $\mathbf{v}$ , volgt hieruit dat  $\mathbf{F} = \nabla f$ .

Dankzij de kettingregel (zie vergelijking (8)) is hieraan zeker voldaan als de kracht *enkel van de positie  $\mathbf{r}$  afhangt* (dus niet van de snelheid, en niet expliciet van de tijd), en bovendien een *gradiëntveld* is:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}) \quad (-\nabla V = \nabla f)$$

De scalaire functie  $V(\mathbf{r})$  wordt de *potentiële energie* van het systeem genoemd. Het minteken is een conventie: de kracht wijst in de richting van afnemende potentiële energie.

**Opmerking.** Wrijvingskrachten zijn typisch evenredig met de snelheid:  $\mathbf{F}_w \approx \alpha \mathbf{v}$ , met  $\alpha < 0$ . Dan is  $\mathbf{F}_w \cdot \mathbf{v} = \alpha v^2 < 0$ , wat altijd negatief is. Een kringintegraal kan dan nooit verdwijnen, dus wrijvingskrachten zijn nooit conservatief. Een conservatief systeem is bijgevolg noodzakelijk een geïdealiseerd systeem *zonder* wrijving.

**Opmerking.** Een geladen deeltje in een magnetisch veld  $\mathbf{B}$  ondervindt een Lorentz-kracht evenredig met  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ , die altijd loodrecht op de snelheid staat. Deze kracht levert dus geen arbeid en hoeft niet als gradient van een potentiaal te worden geschreven. Dit is een speciale situatie die verder wordt behandeld in de cursus elektromagnetisme.

**Behoud van totale energie.** Voor een conservatief systeem ( $\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r})$ ) wordt de verrichte arbeid:

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_{t_1}^{t_2} (-\nabla V(\mathbf{r}(t))) \cdot \dot{\mathbf{r}} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} V(\mathbf{r}(t)) dt = V(\mathbf{r}(t_1)) - V(\mathbf{r}(t_2)).$$

Gecombineerd met de arbeid-energiestelling volgt:

$$T(t_2) - T(t_1) = V(t_1) - V(t_2),$$

wat herschreven kan worden als

$$T(t_1) + V(t_1) = T(t_2) + V(t_2).$$

De *totale mechanische energie*  $E = T + V$  is dus constant in de tijd: energie is behouden.

**Opmerking** (Tijdsafhankelijke potentiaal). Stel dat  $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = -\nabla V(\mathbf{r}, t)$  met expliciete tijdsafhankelijkheid. Dan kan men via de kettingregel aantonen dat:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t), t) \cdot \dot{\mathbf{r}} dt = \left( -\frac{d}{dt} V(\mathbf{r}(t), t) + \frac{\partial V}{\partial t}(\mathbf{r}(t), t) \right) dt.$$

De totale energie  $T + V$  kan nog steeds gedefinieerd worden:  $E(t) = T(t) + V(\mathbf{r}(t), t)$ , maar is niet langer behouden wegens de  $\frac{\partial V}{\partial t}$ -bijdrage:  $\frac{dE}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t}$ .

## Mechanica van meerdere deeltjes (G1.2)

We veralgemenen nu de resultaten van de vorige sectie naar een systeem van  $N$  deeltjes. Daarbij onderscheiden we twee types van krachten:

- *Externe krachten:* krachten die op de deeltjes inwerken vanuit objecten of velden *buiten* het systeem.
- *Interne krachten:* krachten die de deeltjes *op elkaar* uitoefenen.

### De wetten van Newton voor een systeem van deeltjes

De tweede wet van Newton voor deeltje  $i$  luidt:

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_j \mathbf{F}_{ji},$$

waarbij  $\mathbf{F}_i^{(e)}$  de externe kracht op deeltje  $i$  is, en  $\mathbf{F}_{ji}$  de interne kracht van deeltje  $j$  op deeltje  $i$ .

De derde wet van Newton (zwakke vorm, wet van actie en reactie):

$$\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}.$$

## Het zwaartepunt en behoud van totale impuls

**Het zwaartepunt.** De positie van het *zwaartepunt* (center of mass) is gedefinieerd als het gewogen gemiddelde van de posities van de afzonderlijke deeltjes:

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \mathbf{r}_i,$$

waarbij  $M = \sum_i m_i$  de totale massa van het systeem is.

**Beweging van het zwaartepunt.** Sommeer de bewegingsvergelijkingen van alle deeltjes:

$$\sum_i \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{i,j} \mathbf{F}_{ji}.$$

Door de derde wet van Newton vallen de interne krachten paarsgewijs weg ( $\mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_{ij} = \mathbf{0}$ ), zodat:

$$M\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}^{(e)},$$

waarbij  $\mathbf{F}^{(e)} = \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)}$  de totale externe kracht is.

Dit is een opmerkelijk resultaat: het zwaartepunt beweegt alsof de totale massa van het systeem erin geconcentreerd zit, en er een kracht gelijk aan de som van de externe krachten op inwerkt. De totale impuls  $\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i = M\dot{\mathbf{R}}$  voldoet aan:

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}^{(e)}.$$

### Stelling –

Als de totale externe kracht nul is ( $\mathbf{F}^{(e)} = \mathbf{0}$ ), is de totale impuls  $\mathbf{P}$  behouden.

## Behoud van draaimoment voor een systeem

Definieer het totale draaimoment en totale externe krachtmoment:

$$\mathbf{L} = \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i), \quad \mathbf{N}^{(e)} = \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(e)}).$$

Door de bewegingsvergelijking voor deeltje  $i$  vectorieel te vermenigvuldigen met  $\mathbf{r}_i$  en te sommeren, vindt men:

$$\sum_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i = \frac{d}{dt} \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i) - \sum_i \dot{\mathbf{r}}_i \times \mathbf{p}_i = \dot{\mathbf{L}},$$

omdat  $\dot{\mathbf{r}}_i \times \mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i \times \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ .

Nu gebruiken we de *sterke vorm* van de derde wet van Newton:  $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$  en de interne krachten zijn *centraal*, d.w.z.  $\mathbf{F}_{ji}$  is parallel met de verbindinglijn  $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ . Onder deze voorwaarde vallen de bijdragen van de interne krachten aan het krachtmoment paarsgewijs weg, en we vinden:

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{N}^{(e)}.$$

*Bewijs.* Splits de krachten als  $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij}$ . Dan:

$$\sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} = \mathbf{N}^{(e)} + \sum_{i < j} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji}).$$

Met  $\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}$  volgt:

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji} = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ij}.$$

Aangezien de krachten centraal zijn, is  $\mathbf{F}_{ij} \parallel (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ , dus elke term is nul. Bijgevolg:

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} = 0, \quad \text{en dus} \quad \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{N}^{(e)}.$$

Hieruit volgt  $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{N}^{(e)}$ . □

### Stelling –

Als het totale externe krachtmoment nul is ( $\mathbf{N}^{(e)} = \mathbf{0}$ ), is het totale draaimoment  $\mathbf{L}$  behouden.

**Ontbinding van het draaimoment.** Het totale draaimoment kan worden opgesplitst in een bijdrage van de beweging van het zwaartepunt en een bijdrage van de relatieve beweging van de deeltjes rond het zwaartepunt.

Introduceer plaatsvectoren  $\mathbf{r}'_i$  gemeten ten opzichte van het zwaartepunt  $\mathbf{R}$ :

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_i, \quad \text{zodat} \quad \sum_i m_i \mathbf{r}'_i = \mathbf{0}.$$

*Bewijs.*

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \mathbf{r}_i \Rightarrow M\mathbf{R} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i = \sum_i m_i (\mathbf{R} + \mathbf{r}'_i) = M\mathbf{R} + \sum_i m_i \mathbf{r}'_i.$$

□

De snelheid wordt  $\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{r}}'_i$ , en de impuls  $\mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{R}} + \mathbf{p}'_i$ . Dan geldt:

$$\mathbf{L} = \mathbf{R} \times \mathbf{P} + \sum_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{p}'_i.$$

*Bewijs.*

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \sum_i (\mathbf{R} + \mathbf{r}'_i) \times (m_i \dot{\mathbf{R}} + \mathbf{p}'_i) = \mathbf{R} \times \sum_i m_i \dot{\mathbf{R}} + \sum_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{p}'_i \\ &+ \mathbf{R} \times \sum_i \mathbf{p}'_i + \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \times \underbrace{\sum_i m_i \dot{\mathbf{R}}}_{=\mathbf{P}} + \sum_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{p}'_i + \mathbf{R} \times \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}'_i + \left( \sum_i m_i \mathbf{r}'_i \right) \times \dot{\mathbf{R}} \end{aligned}$$

$$= \mathbf{R} \times \mathbf{P} + \sum_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{p}'_i + \mathbf{R} \times \underbrace{\frac{d}{dt} \sum_i m_i \mathbf{r}'_i}_{=0} + \underbrace{\left( \sum_i m_i \mathbf{r}'_i \right)}_{=0} \times \dot{\mathbf{R}}.$$

□

Het eerste term is het draaimoment van het zwaartepunt (alsof de totale massa  $M$  geconcentreerd is in  $\mathbf{R}$ ), en het tweede term is het draaimoment gegenereerd door de relatieve bewegingen van de deeltjes *rond* het zwaartepunt.

## Kinetische energie van een systeem

De arbeid verricht door alle krachten om het systeem van de configuratie op  $t_1$  naar die op  $t_2$  te brengen is:

$$W_{1 \rightarrow 2} = \sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{s}_i = \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i dt.$$

Via de bewegingsvergelijkingen ( $\mathbf{F}_i = \dot{\mathbf{p}}_i = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$ ) vindt men opnieuw:

$$W_{1 \rightarrow 2} = T(t_2) - T(t_1),$$

met de totale kinetische energie:

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2.$$

Ook de kinetische energie laat zich opsplitsen:

$$T = \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i (\dot{\mathbf{r}}'_i)^2,$$

d.w.z. de kinetische energie van het zwaartepunt plus de kinetische energie van de interne bewegingen.

## Behoud van energie voor een systeem

We onderstellen nu conservatieve externe én interne krachten.

**Conservatieve externe krachten.** De externe kracht op deeltje  $i$  hangt enkel af van de positie van dat deeltje:

$$\mathbf{F}_i^{(e)}(\mathbf{r}_i) = -\nabla_i V_i(\mathbf{r}_i),$$

waarbij  $\nabla_i = \left( \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial z_i} \right)$  de gradiënt is naar de coördinaten van deeltje  $i$ .

**Conservatieve interne krachten.** Translatie-invariantie impliceert dat de kracht van deeltje  $j$  op deeltje  $i$  enkel kan afhangen van het verschil  $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ :

$$\mathbf{F}_{ji}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = -\nabla_i V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j).$$

De symmetrievoorwaarde  $V(\mathbf{r}) = V(-\mathbf{r})$  zorgt automatisch voor de derde wet:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{ij} &= -\nabla_j V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = -\nabla V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \frac{\partial(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{\partial \mathbf{r}_j} = \nabla V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \\ &= \nabla_i V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = -\mathbf{F}_{ji}.\end{aligned}$$

Centrale interne krachten (sterke wet van actie en reactie, waarbij  $\mathbf{F}_{ji} \parallel (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ ) vereisen bovendien dat de potentiaal enkel een functie is van de *afstand*:  $V_{ij} = V(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$ . Dit volgt omdat  $\nabla f(|\mathbf{r}|) \sim \mathbf{r}$ , zodat

$$\nabla_i V(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \sim (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j),$$

wat inderdaad een centrale kracht geeft.

*Bewijs.*

$$\begin{aligned}\text{Stel } \mathbf{r} &= \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, \quad r = |\mathbf{r}|, \quad \nabla_i V(r) = V'(r) \nabla_i r, \quad r = \sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} \Rightarrow \nabla_i r = \frac{\mathbf{r}}{r} \\ \Rightarrow \nabla_i V(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) &= V'(r) \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \sim (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j).\end{aligned}$$

□

**Totale potentiële energie en energiebehoud.** In geval van conservatieve externe en interne krachten kan men een totale potentiële energie definiëren:

$$V_{\text{tot}} = \sum_i V_i(\mathbf{r}_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} V(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|).$$

De factor  $\frac{1}{2}$  vermijdt dubbeltelling: elk paar  $(i, j)$  wordt slechts eenmaal meegeteld.

#### Stelling –

Voor een systeem met conservatieve externe en interne krachten is de totale energie  $E = T + V_{\text{tot}}$  een behouden grootte.

**Opmerking** (Starre lichamen). Een bijzonder geval is het *starre lichaam*: een systeem waarbij de onderlinge afstanden tussen de deeltjes constant blijven gedurende de beweging. In dat geval blijft de interne potentiële energie  $\frac{1}{2} \sum_{i,j} V(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$  constant, en speelt enkel de kinetische en externe potentiële energie een rol in de energiebalans.

## Bindingen (G1.3)

### Wat zijn bindingen en waarom zijn ze problematisch?

Tot nu toe veronderstelden we dat de deeltjes zich vrijelijk door de ruimte kunnen bewegen. In de praktijk zijn systemen vaak beperkt in hun beweging door geometrische beperkingen, die we *bindingen* noemen. Voorbeelden: een kraal die langs een draad moet glijden, een bol die over een oppervlak rolt, de arm van een slinger waarvan de lengte vast is.

Bindingen veroorzaken twee problemen in de Newtoniaanse aanpak:

1. De coördinaten van de deeltjes zijn door de bindingen niet onafhankelijk van elkaar, zodat de bewegingsvergelijkingen van Newton direct een overbepaald stelsel vormen.
2. De bindingen gaan gepaard met *reactiekrachten* (normaalkrachten, spankrachten, ...) die niet a priori gegeven zijn, maar afhangen van de oplossing zelf. Ze zijn dus moeilijk te hanteren.

## Classificatie van bindingen

**Holonome bindingen.** Een binding is *holonoom* als ze kan worden uitgedrukt als een algebraïsche vergelijking van de posities en eventueel de tijd:

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0.$$

Voorbeeld: een deeltje dat bewegen moet op een boloppervlak met straal  $R$ :

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Holonome bindingen zonder expliciete tijdsafhankelijkheid worden *scleronom* genoemd; met tijdsafhankelijkheid (bvb. een boloppervlak met tijdsafhankelijke straal  $R(t)$ ) heten ze *rheönoom*.

**Niet-holonome bindingen.** Alle overige bindingen noemt men *niet-holonoom*: ongelijkheden (bvb.  $x^2 + y^2 + z^2 \geq R^2$  voor een ondoordringbare bol), of bindingen met een essentiële snelheidsafhankelijkheid die niet te integreren is tot een positievergelijking.

**Opmerking:** Vanaf nu beperken we ons tot systemen met *holonome* bindingen. Niet-holonome bindingen en de bijbehorende behandeling (zie het handboek) moeten niet gekend zijn voor dit vak.

## Veralgemeende coördinaten

Het eerste probleem (afhankelijke coördinaten) wordt opgelost door het invoeren van *veralgemeende coördinaten*.

Stel dat we  $N$  deeltjes hebben, dus  $3N$  cartesische coördinaten, met  $n_b$  holonome bindingen  $\{f_n(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0\}$ ,  $n = 1, \dots, n_b$ . Door de bindingsvergelijkingen te gebruiken om  $n_b$  onbekenden te elimineren, houden we

$$n_q = 3N - n_b$$

onafhankelijke variabelen over. Dit aantal heet het aantal *vrijheidsgraden* van het systeem.

Equivalent kunnen we de doorsnijding van de bindingsoppervlakken parametriseren met  $n_q$  onafhankelijke variabelen  $q_1, q_2, \dots, q_{n_q}$ , de *veralgemeende coördinaten*, zodat

$$\mathbf{r}_i \equiv \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_{n_q}, t)$$

automatisch aan de bindingen voldoet voor alle waarden van  $(q_1, \dots, q_{n_q})$ .

**Eenvoudige voorbeelden.**

- Één deeltje op een boloppervlak (al dan niet tijdsafhankelijke straal  $R(t)$ ): 2 veralgemeende coördinaten  $(\theta, \varphi)$ , met

$$x = R(t) \sin \theta \cos \varphi, \quad y = R(t) \sin \theta \sin \varphi, \quad z = R(t) \cos \theta.$$

- De dubbele slinger (zie Fig. 1.4 in het handboek van Goldstein): twee hoeken volstaan als veralgemeende coördinaten.
- Zelfs zonder bindingen kan het handig zijn om veralgemeende coördinaten te gebruiken: voor een deeltje in een centraal krachtveld zijn bolcoördinaten  $(r, \theta, \varphi)$  veel natuurlijker dan Cartesische coördinaten.

**Het tweede probleem: reactiekrachten elimineren.** Kunnen we een formulering van de dynamica construeren waarbij de reactiekrachten uit de vergelijkingen verdwijnen? Historisch gezien was dat precies de motivatie voor Lagrange om zijn formalisme te ontwikkelen. We volgen dit pad in de volgende sectie.

## Het principe van d'Alembert en de Lagrangevergelijkingen (G1.4)

Het doel van deze sectie is een nieuwe formulering van de mechanica te construeren die:

1. automatisch rekening houdt met holonome bindingen via veralgemeende coördinaten, en
2. de onbekende reactiekrachten elimineert uit de beschrijving.

Het resultaat zijn de Lagrangevergelijkingen, die equivalent zijn aan de wetten van Newton maar veel krachtiger in de praktijk.

### Opzet

Beschouw  $N$  deeltjes onderworpen aan  $n_b$  holonome, tijdsafhankelijke bindingen:

$$f_n(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = 0, \quad n = 1, \dots, n_b,$$

of beknopt  $f_n(\mathbf{r}_i) = 0$ .

Een door de bindingen toegelaten pad  $\{\mathbf{r}_i(t)\}$  voldoet aan deze vergelijkingen voor alle  $t$ . Door de tijdsafgeleide te nemen vinden we de voorwaarden waaraan de snelheden moeten voldoen:

$$\frac{d}{dt} f_n(\mathbf{r}_i(t)) = \sum_i \nabla_i f_n(\mathbf{r}_i(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}_i(t) = 0.$$

Dit zegt dat de toegelaten snelheidsvectoren loodrecht staan op de normalen van de bindingsoppervlakken.

## Het principe van d'Alembert

Als gevolg van de bindingen ondervindt elk deeltje een reactiekracht  $\mathbf{F}_i^{(r)}$ . De totale kracht op deeltje  $i$  is de som van de toegepaste kracht en de reactiekracht (die zorgt dat het systeem op het oppervlak blijft):

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(a)} + \mathbf{F}_i^{(r)}.$$

### Definitie – Principe van d'Alembert

Voor holonome tijdsonafhankelijke bindingen geldt dat de totale arbeid verricht door de reactiekrachten gedurende een *toegelaten* beweging nul is:

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{(r)} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = 0.$$

**Intuïtie achter d'Alembert.** Neem als voorbeeld één deeltje met één binding  $f(\mathbf{r}) = 0$ . Dit definieert een oppervlak in de driedimensionale ruimte. De normaal op het oppervlak in een punt  $\mathbf{r}$  is gegeven door  $\nabla f(\mathbf{r})$ . De tijdsafgeleide van de binding,

$$\frac{d}{dt}f(\mathbf{r}(t)) = (\nabla f(\mathbf{r}(t))) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) = 0,$$

zegt dat de snelheid  $\dot{\mathbf{r}}$  loodrecht staat op de normaalrichting, en dus in het raakvlak aan het oppervlak ligt. Maar de reactiekracht op een deeltje dat op een oppervlak beweegt, staat altijd loodrecht op het oppervlak (ze is altijd gericht langs de normaal). Bijgevolg is  $\mathbf{F}^{(r)} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0$  gedurende de hele beweging.

## Eliminatie van de reactiekrachten

De tweede wet van Newton voor deeltje  $i$  is  $\mathbf{F}_i^{(a)} + \mathbf{F}_i^{(r)} - \dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{0}$ . We nemen het scalair product met  $\dot{\mathbf{r}}_i$  en sommeren over alle deeltjes:

$$\sum_i \left( \mathbf{F}_i^{(a)} + \mathbf{F}_i^{(r)} - \dot{\mathbf{p}}_i \right) \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = 0.$$

Dankzij het principe van d'Alembert valt de term met reactiekrachten weg:

$$\sum_i \left( \mathbf{F}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{p}}_i \right) \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = 0.$$

Vanaf nu laten we de index  $(a)$  weg en verstaan we onder  $\mathbf{F}_i$  de toegepaste kracht.

## Overgang naar veralgemeende coördinaten

De vergelijking hierboven,

$$\sum_i (\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = 0,$$

bevat nog de Cartesische coördinaten  $\mathbf{r}_i$ , die via de bindingen onderling afhankelijk zijn. We moeten overgaan naar onafhankelijke veralgemeende coördinaten.

We definiëren  $n_q = 3N - n_b$  veralgemeende coördinaten zodat

$$\mathbf{r}_i \equiv \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_{n_q})$$

automatisch aan de bindingen voldoet. Beknopt schrijven we  $\mathbf{r}_i \equiv \mathbf{r}_i(q_k)$ .

Als we de  $q_k$  tijdsafhankelijk maken, beschrijft dit een pad:

$$\mathbf{r}_i(t) = \mathbf{r}_i(q_k(t)).$$

Het verband tussen Cartesische en veralgemeende snelheden volgt via de kettingregel:

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k.$$

Merk op dat de partiële afgeleiden  $\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}$  functies zijn van de  $q_k$ , niet van de  $\dot{q}_k$ .

**Een nuttige eigenschap.** Uit de uitdrukking voor  $\dot{\mathbf{r}}_i$  volgt onmiddellijk dat

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}.$$

Dit lijkt triviaal maar is een cruciale stap in de afleiding hieronder.

## Veralgemeende krachten

Substitueer de uitdrukking voor  $\dot{\mathbf{r}}_i$  in d'Alemberts vergelijking:

$$\sum_i (\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_k \dot{q}_k \sum_i (\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} = 0.$$

We definiëren de *veralgemeende kracht*:

$$Q_k = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}.$$

De veralgemeende kracht  $Q_k$  heeft niet noodzakelijk de dimensie van een kracht, maar het product  $Q_k q_k$  heeft altijd de dimensie van energie.

## Herschrijven van de traagheidstermen

Het meest technische deel van de afleiding is het uitwerken van de term met  $\dot{\mathbf{p}}_i = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$ . We tonen aan dat:

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k},$$

waarbij  $T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2$  de totale kinetische energie is.

*Bewijs.* De truc bestaat uit twee stappen. Eerst werken we de term  $m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}$  uit via de productregel:

$$\ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left( \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right) - \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right).$$

Vervolgens gebruiken we twee sleuteleigenschappen:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_k}, \quad (\text{bewezen hierboven})$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_k}. \quad (\text{wisselwerking van afgeleiden})$$

De tweede eigenschap volgt doordat

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} = \sum_{\ell} \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_{\ell} \partial q_k} \dot{q}_{\ell} = \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \sum_{\ell} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_{\ell}} \dot{q}_{\ell} \right) = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_k}.$$

Hiermee wordt:

$$\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} = \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}_i^2 \right),$$

en

$$\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right) = \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}_i^2 \right).$$

Sommeer na vermenigvuldiging met  $m_i$  over alle deeltjes:

$$\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left( \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k}.$$

□

## De Lagrangevergelijkingen (eerste vorm)

We substitueren het bovenstaande terug in d'Alemberts vergelijking en vinden:

$$\sum_k \dot{q}_k \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k \right\} = 0.$$

Omdat de  $q_k$  onafhankelijke coördinaten zijn, zijn de bijbehorende  $\dot{q}_k$  ook onafhankelijk. De enige manier waarop bovenstaande uitdrukking nul is voor *willekeurige*  $\dot{q}_k$ , is als elke term afzonderlijk nul is:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad k = 1, \dots, n_q.$$

Dit zijn de **Lagrangevergelijkingen in de eerste vorm**, geldig voor *alle* types krachten (conservatief of niet).

## De Lagrangevergelijkingen (tweede vorm): conservatieve krachten

Voor systemen met *conservatieve* krachten ( $\mathbf{F}_i = -\nabla_i V$ ) kan men de veralgemeende kracht  $Q_k$  schrijven in termen van de potentiaal  $V$ . Via de kettingregel:

$$\frac{\partial V}{\partial q_k} = \sum_i (\nabla_i V) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} = - \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} = -Q_k,$$

zodat:

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k}.$$

Omdat  $V$  niet afhangt van de veralgemeende snelheden  $\dot{q}_k$ , geldt ook:

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = 0.$$

We kunnen daarmee de term  $-Q_k$  in de rechterledige absorberen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_k} = 0.$$

### Definitie – Lagrangiaan

De functie  $L = T - V$  heet de *Lagrangiaan* van het systeem.

De **Lagrangevergelijkingen** (tweede vorm, voor conservatieve krachten) zijn:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, \dots, n_q.$$

### Opmerkingen.

- Er zijn  $n_q = 3N - n_b$  Lagrangevergelijkingen, evenveel als er onafhankelijke vrijheidsgraden zijn in het systeem.
- De Lagrangevergelijkingen zijn equivalent met de bewegingsvergelijkingen van Newton, maar door over te gaan naar veralgemeende coördinaten wordt automatisch rekening gehouden met de bindingen, en verdwijnen de reactiekrachten volledig uit de vergelijkingen.
- Een groot voordeel van de Lagrangeformulering is dat men enkel werkt met *scalaire* functies (de kinetische energie  $T$ , de potentiaal  $V$ , en de Lagrangiaan  $L$ ) in plaats van met vectorgrootheden zoals krachten en versnellingen.
- De Lagrangevergelijkingen behouden dezelfde vorm bij een keuzewijziging van de veralgemeende coördinaten: ze zijn *coördinaatinvariant*. Dit is een groot verschil met de vectoriële Newtoniaanse formulering, die er anders uitziet in elk coördinaatstelsel.
- De afleiding hier geldt voor holonome tijdsafhankelijke bindingen. Voor tijdsafhankelijke holonome bindingen vindt men dezelfde Lagrangevergelijkingen (zie het handboek), maar die behandeling is niet te kennen voor dit vak.

## Eenvoudige toepassingen van het Lagrange-formalisme (G1.6)

Om de kracht van het Lagrange-formalisme te illustreren, passen we het toe op een aantal concrete systemen. Voor elk systeem volgen we steeds dezelfde stappen:

1. Identificeer de vrijheidsgraden en kies geschikte veralgemeende coördinaten.
2. Schrijf de kinetische energie  $T$  en de potentiële energie  $V$  in termen van de veralgemeende coördinaten.
3. Stel de Lagrangiaan op:  $L = T - V$ .
4. Pas de Lagrangevergelijkingen toe:  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$ .

## Één deeltje in 3D met Cartesische coördinaten

Dit is het eenvoudigste geval: geen bindingen, drie vrijheidsgraden, veralgemeende coördinaten  $(q_1, q_2, q_3) = (x, y, z)$ .

De kinetische energie is:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

De potentiële energie is  $V = V(x, y, z)$ . De Lagrangevergelijking voor  $q_k = x$  luidt:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = F_x.$$

Analoog voor  $y$  en  $z$ . Dit reproduceert inderdaad de tweede wet van Newton. Dit toont aan dat de Lagrangeformulering voor Cartesische coördinaten triviaal overeenstemt met Newton.

## Één deeltje in het 2D vlak met poolcoördinaten

Beschouw een deeltje in het vlak, beschreven door poolcoördinaten  $(r, \varphi)$  in plaats van Cartesische coördinaten  $(x, y)$ . Er zijn geen bindingen; de veralgemeende coördinaten zijn  $q_1 = r$  en  $q_2 = \varphi$ .

Het verband met Cartesische coördinaten is  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ , zodat:

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r\dot{\varphi} \sin \varphi, \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r\dot{\varphi} \cos \varphi.$$

De kinetische energie wordt:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2).$$

Voor een centrale kracht met potentiaal  $V = V(r)$  is de Lagrangiaan:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r).$$

De Lagrangevergelijking voor  $r$ :

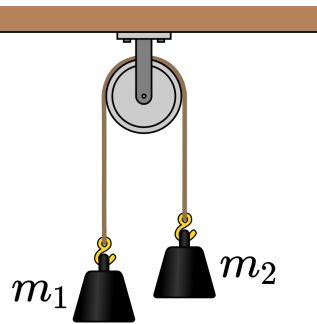
$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) - mr\dot{\varphi}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 = -\frac{dV}{dr}.$$

De Lagrangevergelijking voor  $\varphi$ :

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) = 0 \quad \Rightarrow \quad mr^2\dot{\varphi} = \text{const.}$$

De laatste vergelijking is niets anders dan het behoud van het draaimoment  $L_z = mr^2\dot{\varphi}$ , wat automatisch volgt uit het feit dat  $\varphi$  niet expliciet in de Lagrangiaan verschijnt. Wanneer een veralgemeende coördinaat niet expliciet in  $L$  voorkomt, spreekt men van een *cyclische* coördinaat, en de bijbehorende veralgemeende impuls is behouden. We komen hier uitgebreider op terug in hoofdstuk 2.

## De machine van Atwood



De machine van Atwood bestaat uit twee massa's  $m_1$  en  $m_2$  die via een massaloos touw over een wrijvingsvrije katrol met straal  $R$  zijn verbonden. Het touw heeft een vaste lengte  $\ell$ .

**Vrijheidsgraden.** Kies als veralgemeende coördinaat  $q = y$ , waarbij  $y$  de afstand is van massa  $m_1$  tot het raakpunt van de katrol, gemeten positief naar beneden. De verticale positie van massa  $m_1$  in een opwaarts-positief stelsel is dan  $y_1 = -y$ .

De lengte van het touw bestaat uit drie delen: het linker verticale stuk, het rechter verticale stuk en de halve omtrek van de katrol. Omdat de verticale coördinaten  $y_1$  en  $y_2$  positief naar boven zijn, zijn de lengtes van de verticale stukken gelijk aan  $-y_1$  en  $-y_2$ . Dus:

$$-y_1 - y_2 + \pi R = \ell.$$

Hieruit volgt:

$$y - y_2 + \pi R = \ell,$$

en dus:

$$y_2 = y + \pi R - \ell.$$

**Kinetische en potentiële energie.** De snelheden zijn:

$$\dot{y}_1 = -\dot{y}, \quad \dot{y}_2 = \dot{y}.$$

Dus:

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{y}^2,$$

$$\begin{aligned} V &= m_1gy_1 + m_2gy_2 \\ &= m_1g(-y) + m_2g(y + \pi R - \ell) \\ &= (-m_1 + m_2)gy + \text{const.} \end{aligned}$$

**Lagrangevergelijking.**

$$L = T - V = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{y}^2 + (m_1 - m_2)gy + \text{const.}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad (m_1 + m_2)\ddot{y} = (m_1 - m_2)g.$$

De versnelling van massa  $m_1$  is dus:

$$\ddot{y} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g.$$

Merk op dat de constante term  $\pi R$  geen invloed heeft op de bewegingsvergelijking. Ze verdwijnt in de afgeleiden. Daarom krijg je hetzelfde resultaat als in de eenvoudigere benadering zonder expliciete katrolterm.

## Kraaltje dat glijdt over een roterende staaf

Een kraaltje van massa  $m$  kan wrijvingsloos glijden langs een rechte staaf. De staaf roteert in een horizontaal vlak met constante hoeksnelheid  $\omega$  om een vast punt (de oorsprong).

**Vrijheidsgraden en veralgemeende coördinaat.** De staaf legt de hoek vast op elk tijdstip:  $\varphi(t) = \omega t$ . De enige vrijheid is de positie van het kraaltje *langs* de staaf, die we beschrijven door de afstand tot de oorsprong:  $q = r$ .

De Cartesische coördinaten zijn:

$$x = r \cos(\omega t), \quad y = r \sin(\omega t).$$

De snelheidscomponenten:

$$\dot{x} = \dot{r} \cos(\omega t) - r\omega \sin(\omega t), \quad \dot{y} = \dot{r} \sin(\omega t) + r\omega \cos(\omega t).$$

**Lagrangiaan.** Er zijn geen conservatieve krachten in het vlak (de staaf is horizontaal, de zwaartekracht is verticaal en doet geen arbeid), dus  $V = 0$ . De kinetische energie is:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\omega^2).$$

De Lagrangiaan is  $L = T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\omega^2)$ .

### Lagrangevergelijking.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{r} - mr\omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{r} = \omega^2 r.$$

Dit is de bewegingsvergelijking van een harmonische oscillator met *negatieve* “veerkracht”: het kraaltje wordt naar buiten gedreven (centrifugaalterm). De algemene oplossing is:

$$r(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t},$$

met constanten  $A$  en  $B$  bepaald door de beginvoorwaarden. Merk op dat de “centrifugaalkracht”  $mr\omega^2$  automatisch uit de Lagrangiaan rolt, zonder dat ze expliciet als kracht hoefde te worden ingevoerd.

## Hoofdstuk 2

### Inleiding: de configuratieruimte

In hoofdstuk 1 hebben we de Lagrangevergelijkingen afgeleid als een herformulering van de wetten van Newton in veralgemeende coördinaten. In dit hoofdstuk bekijken we dezelfde vergelijkingen vanuit een totaal ander vertrekpunt: het *variationeel principe van Hamilton*. Dit is geen nieuwe fysica, maar een dieper inzicht in de structuur van de mechanica.

Overweeg een systeem van  $N$  deeltjes met  $n_b$  holonome bindingen. De toestand van het systeem wordt dan volledig beschreven door  $n_q = 3N - n_b$  veralgemeende coördinaten  $(q_1, \dots, q_{n_q})$ . Het geheel van alle mogelijke toestanden vormt de *configuratieruimte*: een abstracte  $n_q$ -dimensionale ruimte.

Onder invloed van krachten evolueren de veralgemeende coördinaten in de tijd. Het systeem “beweegt” in de configuratieruimte: het punt  $(q_1(t), \dots, q_{n_q}(t))$  beschrijft een pad. De fundamentele vraag die dit hoofdstuk beantwoordt is: *welk pad legt het systeem af tussen een beginconfiguratie op  $t_1$  en een eindconfiguratie op  $t_2$ ?*

## Het principe van Hamilton (G2.1)

### De actiefunctieaal

We beperken ons tot systemen met holonome bindingen en conservatieve toegepaste krachten, zodat de Lagrangiaan  $L = T - V$  goed gedefinieerd is.

Gegeven de Lagrangiaan  $L(q_k, \dot{q}_k, t)$ , definiëren we voor elk willekeurig pad  $\{q_k(t)\}$  van  $t_1$  naar  $t_2$  de *actie-integraal*:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(q_k(t), \dot{q}_k(t), t) dt.$$

De actie is een getal dat aan elk pad een waarde koppelt. Verschillende paden geven in het algemeen verschillende waarden van  $I$ .

#### Stelling – Principe van Hamilton

Het fysisch gerealiseerde pad — d.w.z. het pad dat het systeem werkelijk aflegt — is precies het pad waarvoor de actie-integraal  $I$  *stationair* is.

“Stationair” betekent: als we het pad een kleine variatie geven (terwijl we begin- en eindpunt vasthouden), verandert de actie niet tot eerste orde in die variatie. Intuïtief: het fysische pad is geen willekeurig pad; het is het speciale pad dat de actie stationair maakt, analoog aan hoe een evenwichtspunt een extremum is van een potentiaal.

Het is nog niet onmiddellijk duidelijk waarom dit principe de juiste bewegingsvergelijkingen geeft. Dat tonen we aan in de volgende twee secties via de variatieanalyse.

## Variatieanalyse (G2.2)

Het principe van Hamilton herleidt de vraag “welk pad is het fysische?” tot een wiskundig probleem: vind het pad dat een bepaalde integraal stationair maakt. De wiskundige techniek die dit oplost, heet *variatierekening*. We bouwen dit op van eenvoudig naar algemeen.

### Het variationeel probleem in één dimensie

**Opzet.** Beschouw een gladde functie  $y(x)$  in het 2D vlak, die een beginpunt  $(x_1, y_1)$  verbindt met een eindpunt  $(x_2, y_2)$ :

$$y(x_1) = y_1 \quad \text{en} \quad y(x_2) = y_2.$$

We schrijven  $\dot{y}(x) \equiv \frac{dy}{dx}(x)$  voor de afgeleide. Er zijn uiteraard oneindig veel zulke paden mogelijk.

Gegeven een functie  $f(y, \dot{y}, x)$  van drie variabelen, kunnen we voor elk pad  $y(x)$  de integraal berekenen:

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), \dot{y}(x), x) dx.$$

De waarde van  $J$  hangt van het pad  $y(x)$  af. We stellen de vraag: *voor welk pad wordt  $J$  stationair?*

**Definitie van stationariteit.** De integraal  $J$  is *stationair* voor een pad  $y(x)$  als een kleine vervorming van dat pad de waarde van  $J$  niet verandert, tot op eerste orde in de vervorming. Dit is de definitie van een extremum (minimum of maximum), maar dan voor een functionaal (een functie die een getal aan een functie koppelt).

**Wiskundige formulering.** Stel dat  $y(x)$  het pad is waarvoor  $J$  stationair wordt. Beschouw een éénparameterfamilie van paden:

$$y(x, \alpha) = y(x) + \alpha \eta(x),$$

waarbij  $\eta(x)$  een willekeurige gladde functie is met

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0,$$

zodat elk pad  $y(x, \alpha)$  nog steeds door de vaste begin- en eindpunten gaat. De parameter  $\alpha$  meet hoe ver we van het pad  $y(x)$  afwijken; voor  $\alpha = 0$  valt het pad samen met  $y(x)$ .

De integraal  $J$  wordt nu een gewone functie van  $\alpha$ :

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x, \alpha), \dot{y}(x, \alpha), x) dx.$$

Stationariteit van  $J$  voor  $y(x)$  (d.w.z. voor  $\alpha = 0$ ) vereist:

$$\left. \frac{dJ}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0.$$

## Afleiding van de Euler-Lagrangevergelijking

We werken de voorwaarde  $\left. \frac{dJ}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0$  expliciet uit.

**Stap 1: Afgeleide door het integraalteken schuiven.** De afgeleide naar  $\alpha$  kan door het integraalteken worden gebracht:

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{d\alpha} f(y(x, \alpha), \dot{y}(x, \alpha), x) dx.$$

**Stap 2: Kettingregel toepassen.** Toepassing van de kettingregel op  $f$  geeft:

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} \right\} dx.$$

Uit de definitie  $y(x, \alpha) = y(x) + \alpha\eta(x)$  volgt direct:

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha}(x, \alpha) = \eta(x) \quad \text{en} \quad \frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha}(x, \alpha) = \dot{\eta}(x).$$

Geëvalueerd in  $\alpha = 0$  (zodat  $y(x, 0) = y(x)$  en  $\dot{y}(x, 0) = \dot{y}(x)$ ) wordt:

$$\left. \frac{dJ}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \dot{\eta}(x) \right\} dx.$$

**Stap 3: Partiële integratie op de tweede term.** De tweede term bevat  $\dot{\eta}(x)$ , wat storend is omdat we de stationariteitsvoorwaarde willen uitdrukken in  $\eta(x)$  alleen. We passen partiële integratie toe op het product  $h(x)\dot{\eta}(x)$ , waarbij  $h(x) = \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}(y(x), \dot{y}(x), x)$ :

$$\int_{x_1}^{x_2} h(x) \dot{\eta}(x) dx = \left[ h(x) \eta(x) \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \dot{h}(x) \eta(x) dx.$$

De randterm  $\left[ h(x) \eta(x) \right]_{x_1}^{x_2} = h(x_2)\eta(x_2) - h(x_1)\eta(x_1)$  verdwijnt omdat  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ .

**Stap 4: Stationariteitsvoorwaarde.** Samenvoegen geeft:

$$\left. \frac{dJ}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right\} dx = 0.$$

Dit moet gelden voor *elke* keuze van  $\eta(x)$  (met  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ ). De enige manier waarop een integraal van de vorm  $\int \eta(x) \cdot g(x) dx = 0$  voor alle  $\eta$  kan gelden, is dat de factor  $g(x)$  zelf identiek nul is op het hele interval.

Bijgevolg voldoet het stationaire pad  $y(x)$  aan de *Euler-Lagrangevergelijking*:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}}$$

Dit is een tweede-orde gewone differentiaalvergelijking voor  $y(x)$ . De oplossing is het pad dat de integraal  $J$  stationair maakt.

### Voorbeeld: het kortste pad tussen twee punten

Als toepassing zoeken we het kortste pad in het vlak tussen twee punten  $(x_1, y_1)$  en  $(x_2, y_2)$ . We weten bij voorbaat dat het antwoord een rechte lijn is, maar het is instructief om te zien hoe de variatierekening dit automatisch oplevert.

De infinitesimale booglengte langs een curve  $y(x)$  is:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dx \sqrt{1 + \dot{y}^2}.$$

De totale lengte van het pad is:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx.$$

Dit is een integraal van het type  $J$  met  $f(y, \dot{y}, x) = \sqrt{1 + \dot{y}^2}$ . We berekenen:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}.$$

De Euler-Lagrangevergelijking wordt:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} \right) = 0.$$

Bijgevolg is  $\frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}$  constant, wat impliceert dat  $\dot{y}$  zelf constant is. De functie  $y(x)$  is dus lineair in  $x$ :

$$y(x) = ax + b.$$

De constanten  $a$  en  $b$  worden bepaald door de randvoorwaarden  $y(x_1) = y_1$  en  $y(x_2) = y_2$ , wat precies het lijnstuk door de twee punten geeft:

$$y(x) = \frac{y_2(x - x_1) + y_1(x_2 - x)}{x_2 - x_1}.$$

De variatierekening heeft automatisch het kortste pad gevonden, precies zoals verwacht.

## De Lagrangevergelijking uit het principe van Hamilton (G2.3)

### Uitbreiding naar meerdere dimensies

We veralgemenen nu het variationeel probleem naar meerdere functies tegelijk. In plaats van één functie  $y(x)$  beschouwen we nu een vectorwaardige functie  $(y_1(x), \dots, y_n(x))$ , die een beginconfiguratie met een eindconfiguratie verbindt.

De integraal die we stationair willen maken is:

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y_1(x), \dots, y_n(x), \dot{y}_1(x), \dots, \dot{y}_n(x), x) dx.$$

We introduceren opnieuw een éénparameterfamilie van paden:

$$y_i(x, \alpha) = y_i(x) + \alpha \eta_i(x), \quad i = 1, \dots, n,$$

met  $\eta_i(x_1) = \eta_i(x_2) = 0$ . Stationariteit  $\left. \frac{dJ}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0$  geeft na kettingregel en partiële integratie (analoog als in één dimensie):

$$0 = \int_{x_1}^{x_2} \sum_i \eta_i(x) \left\{ \frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \right\} dx.$$

Omdat de  $\eta_i(x)$  volledig onafhankelijk en willekeurig zijn, moet elke term afzonderlijk verdwijnen. Dit geeft  $n$  Euler-Lagrangevergelijkingen:

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} = \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

## Koppeling aan het principe van Hamilton

We passen dit nu toe op de actie-integraal van Hamilton. Identificeer  $x \rightarrow t$ ,  $y_i(x) \rightarrow q_k(t)$ , en  $f \rightarrow L$ :

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(q_k(t), \dot{q}_k(t), t) dt.$$

De bijbehorende Euler-Lagrangevergelijkingen zijn:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}, \quad k = 1, \dots, n_q,$$

of equivalenter geschreven:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0.$$

Dit zijn precies de Lagrangevergelijkingen die we in hoofdstuk 1 via het principe van d'Alembert hebben afgeleid! Het principe van Hamilton is dus een alternatieve, elegantere manier om exact dezelfde vergelijkingen te bekomen.

De kracht van de variationele aanpak is dat hij heel compact is: de volledige dynamica van het systeem zit vervat in de eis dat  $\int L dt$  stationair is.

## Voordelen van de variationele formulering (G2.5)

### Vrijheid in de keuze van de Lagrangiaan

De variationele formulering onthult een belangrijke vrijheid: de Lagrangiaan van een systeem is *niet uniek*. Twee Lagrangianen die via een totale tijdsafgeleide met elkaar verbonden zijn, geven dezelfde fysische bewegingsvergelijkingen.

Stel dat een systeem wordt beschreven door een Lagrangiaan  $L(q_k, \dot{q}_k, t)$ . Definieer een nieuwe Lagrangiaan:

$$L'(q_k, \dot{q}_k, t) = L(q_k, \dot{q}_k, t) + \frac{d}{dt} h(q_k, t),$$

waarbij  $h(q_k, t)$  een willekeurige gladde functie is van de coördinaten en de tijd.

**Waarom geven  $L$  en  $L'$  dezelfde bewegingsvergelijkingen?** De bijbehorende actie-integraal van  $L'$  is:

$$I' = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ L(q_k(t), \dot{q}_k(t), t) + \frac{d}{dt} h(q_k(t), t) \right\} dt.$$

De bijdrage van de extra term reduceert zich via de fundamenteelstelling van de calculus tot:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} h(q_k(t), t) dt = h(q_k(t_2), t_2) - h(q_k(t_1), t_1).$$

Dit is een randterm die voor alle paden die hetzelfde beginpunt  $\{q_k(t_1)\}$  en eindpunt  $\{q_k(t_2)\}$  delen, dezelfde vaste waarde heeft. Bij het variëren van het pad (waarbij begin- en eindpunt vastgehouden worden) verandert deze term niet. Bijgevolg maakt  $L'$  precies dezelfde paden stationair als  $L$ , en zijn de bewegingsvergelijkingen identiek.

**Directe verificatie via de Lagrangevergelijkingen.** Men kan dit ook rechtstreeks nagaan. De extra term in  $L'$  is:

$$\frac{d}{dt} h(q_k, t) = \sum_{\ell} \frac{\partial h}{\partial q_{\ell}} \dot{q}_{\ell} + \frac{\partial h}{\partial t}.$$

Berekening van de ingrediënten in de Lagrangevergelijkingen voor  $L'$  geeft:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L'}{\partial q_k} &= \frac{\partial L}{\partial q_k} + \sum_{\ell} \frac{\partial^2 h}{\partial q_k \partial q_{\ell}} \dot{q}_{\ell} + \frac{\partial^2 h}{\partial q_k \partial t}, \\ \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial h}{\partial q_k}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_{\ell} \frac{\partial^2 h}{\partial q_k \partial q_{\ell}} \dot{q}_{\ell} + \frac{\partial^2 h}{\partial q_k \partial t}. \end{aligned}$$

In het verschil  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L'}{\partial q_k}$  vallen alle termen met  $h$  weg, en er blijft over:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L'}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k}.$$

De Lagrangevergelijkingen voor  $L$  en  $L'$  zijn dus identiek.

**Opmerking.** Deze vrijheid is nuttig in de praktijk. Soms kan men door een slimme keuze van  $h$  de Lagrangiaan vereenvoudigen, of een meer symmetrische vorm geven, zonder de fysica te veranderen.

## Behoudswetten en symmetrie-eigenschappen (G2.6)

### Eerste integralen van de beweging

Een systeem met  $n_q$  vrijheidsgraden wordt beschreven door  $n_q$  Lagrangevergelijkingen, elk van tweede orde. Een algemene oplossing vereist  $2n_q$  integratieconstanten (bvb. de beginposities  $q_k(t_0)$  en beginsnelheden  $\dot{q}_k(t_0)$ ).

In de meeste gevallen zijn de bewegingsvergelijkingen niet exact analytisch op te lossen en moet men numerieke methoden gebruiken. Maar soms weet men op voorhand dat een bepaalde functie  $f(q_k, \dot{q}_k, t)$  constant blijft gedurende de beweging. Zo'n functie noemt men een **eerste integraal van de beweging**. Elke bekende eerste integraal vermindert effectief de orde van het probleem en maakt het makkelijker om de oplossing te vinden.

De behoudswetten uit hoofdstuk 1 (behoud van energie, impuls, draaimoment) zijn alle van dit type. We bekijken nu hoe ze systematisch in het Lagrange-formalisme verschijnen.

### Veralgemeend moment en cyclische coördinaten

**Het veralgemeend moment.** Beschouw de Lagrangiaan in Cartesische coördinaten:

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 - V(\mathbf{r}_j).$$

De afgeleide van  $L$  naar de  $x$ -component van de snelheid van deeltje  $i$  is:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i = p_{ix},$$

de  $x$ -component van de impuls van deeltje  $i$ . Dit suggereert de volgende algemene definitie:

#### Definitie – Veralgemeend moment

Het *veralgemeend moment* (of canonisch toegevoegd moment) geassocieerd aan de veralgemeende coördinaat  $q_k$  is:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}.$$

Het veralgemeend moment heeft niet noodzakelijk de dimensie van een gewone impuls, maar het product  $p_k \dot{q}_k$  heeft altijd de dimensie van energie.

**Cyclische coördinaten.** Een veralgemeende coördinaat  $q_k$  noemt men *cyclisch* (of ignoreerbaar) als zij *niet expliciet* voorkomt in de Lagrangiaan (terwijl  $\dot{q}_k$  wel kan voorkomen). Formeel:  $\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$ .

#### Stelling –

Het veralgemeend moment van een cyclische coördinaat is een behouden grootheid.

*Bewijs.* De Lagrangevergelijking voor  $q_k$  luidt:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0.$$

Als  $q_k$  cyclisch is, valt de tweede term weg en krijgen we:

$$\dot{p}_k = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0.$$

Dus  $p_k$  is constant in de tijd. □

Dit is een fundamenteel resultaat: elke symmetrie van de Lagrangiaan (het niet afhangen van een bepaalde coördinaat) leidt tot een behouden grootte. Dit is een voorproefje van de stelling van Noether, die we in de voorbeelden hieronder concreet zien.

### Voorbeeld 1: translatie-invariantie en impulsbehoud

**Situatie.** Stel dat als de coördinaat  $q_1$  verandert met een infinitesimaal bedrag  $dq_1$ , het hele systeem een translatie ondergaat over  $dq_1$  in een vaste richting  $\mathbf{n}$ . Wiskundig uitgedrukt:

$$\mathbf{r}_i(q_1 + dq_1, q_2, \dots) = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots) + (dq_1) \mathbf{n},$$

of dus:

$$\frac{\mathbf{r}_i(q_1 + dq_1, q_2, \dots) - \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots)}{dq_1} = \mathbf{n}$$

wat impliceert dat:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_1} = \mathbf{n} \quad (\text{een constante vector, onafhankelijk van } i).$$

**Kinetische energie is translatie-invariant.** Het verband tussen Cartesische en veralgemeende snelheden is  $\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k$ . Afleiden naar  $q_1$  geeft:

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_1} = \sum_k \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_k \partial q_1} \dot{q}_k = \sum_k \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial q_k} \dot{q}_k = \mathbf{0},$$

omdat  $\mathbf{n}$  constant is. De Cartesische snelheden hangen dus niet van  $q_1$  af, en bijgevolg  $\frac{\partial T}{\partial q_1} = 0$ .

**Veralgemeende kracht en toegevoegd moment.** De veralgemeende kracht geassocieerd aan  $q_1$  is:

$$Q_1 = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_1} = \left( \sum_i \mathbf{F}_i \right) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}_{\text{tot}} \cdot \mathbf{n},$$

de component van de *totale kracht* in de richting  $\mathbf{n}$ .

Het veralgemeend moment toegevoegd aan  $q_1$  is:

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_1} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_1} = \left( \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \right) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n},$$

de component van de *totale impuls*  $\mathbf{P}$  in de richting  $\mathbf{n}$ .

**Resultaat.** De Lagrangevergelijking voor  $q_1$  is:

$$\dot{p}_1 = Q_1 \iff \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}_{\text{tot}} \cdot \mathbf{n},$$

wat de projectie is van de tweede wet van Newton voor de totale impuls op de richting  $\mathbf{n}$ . Dit reproduceert het eerder bekomen resultaat.

**Stelling –**

Als de potentiaal  $V$  niet afhangt van  $q_1$  (m.a.w. het systeem is invariant onder translaties in de richting  $\mathbf{n}$ ), dan is  $q_1$  cyclisch en is  $p_1 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$  een behouden grootte.

Met andere woorden: *translatie-invariantie impliceert impulsbehoud*. Als de interacties in het systeem niet veranderen als we het hele systeem verschuiven in de richting  $\mathbf{n}$ , dan is de component van de totale impuls in die richting constant.

**Voorbeeld 2: rotatie-invariantie en draaimomentsebehoud**

**Situatie.** Stel dat als de coördinaat  $q_1$  verandert met  $dq_1$ , het hele systeem een rotatie ondergaat over een hoek  $dq_1$  rond een as met vaste richting  $\mathbf{n}$ . De infinitesimale rotatie van een vector  $\mathbf{r}_i$  over een kleine hoek  $d\varphi$  rond een as  $\mathbf{n}$  geeft een extra bijdrage  $d\varphi \mathbf{n} \times \mathbf{r}_i$ , zodat:

$$\mathbf{r}_i(q_1 + dq_1, q_2, \dots) = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots) + (dq_1) \mathbf{n} \times \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots).$$

Dit impliceert (zie Fig. 2.8 in het handboek voor een geometrische illustratie):

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_1} = \mathbf{n} \times \mathbf{r}_i.$$

**Kinetische energie is rotatie-invariant.** Afleiden van de Cartesische snelheden naar  $q_1$  geeft:

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_1} = \sum_k \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_k \partial q_1} \dot{q}_k = \mathbf{n} \times \sum_k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k = \mathbf{n} \times \dot{\mathbf{r}}_i.$$

De snelheids grootte verandert niet:

$$\frac{\partial}{\partial q_1} (\dot{\mathbf{r}}_i^2) = 2 \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_1} = 2 \dot{\mathbf{r}}_i \cdot (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{r}}_i) = 0,$$

omdat  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{a}) = 0$  voor elke vector  $\mathbf{a}$ . Bijgevolg  $\frac{\partial T}{\partial q_1} = 0$ .

**Veralgemeende kracht en toegevoegd moment.** De veralgemeende kracht geassocieerd aan  $q_1$  is:

$$Q_1 = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_1} = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{r}_i) = \mathbf{n} \cdot \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{N},$$

de component van het *totale krachtmoment*  $\mathbf{N} = \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i)$  in de richting  $\mathbf{n}$ . (We hebben gebruik gemaakt van de cyclische eigenschap van het gemengd product:  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ .)

Het veralgemeend moment toegevoegd aan  $q_1$  is:

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_1} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_1} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{r}_i).$$

Opnieuw via de cyclische eigenschap:

$$p_1 = \mathbf{n} \cdot \sum_i m_i (\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{L},$$

de component van het *totale draaimoment*  $\mathbf{L} = \sum_i m_i (\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i)$  in de richting  $\mathbf{n}$ .

**Resultaat.** De Lagrangevergelijking voor  $q_1$  reproduceert:

$$\dot{p}_1 = Q_1 \iff \dot{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{n}.$$

### Stelling –

Als de potentiaal  $V$  niet afhangt van  $q_1$  (m.a.w. het systeem is invariant onder rotaties rond de as  $\mathbf{n}$ ), dan is  $q_1$  cyclisch en is  $p_1 = \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}$  een behouden grootte.

Met andere woorden: *rotatie-invariantie impliceert draaimomentsebehoud*. Het verband tussen symmetrieën van het systeem en behouden grootheden is geen toeval: dit is de inhoud van de *stelling van Noether*, die in latere cursussen verder uitgewerkt wordt.

## Behoud van energie (G2.7)

We leiden nu een derde behoudswet af vanuit het Lagrange-formalisme: het behoud van energie. We beperken ons tot systemen met holonome *tijdsonafhankelijke* bindingen en conservatieve krachten.

### De Lagrangiaan is tijdsonafhankelijk

Omdat de bindingen tijdsonafhankelijk zijn, hangt de transformatie van Cartesische naar veralgemeende coördinaten niet expliciet van de tijd af:

$$\mathbf{r}_i \equiv \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_{n_q}).$$

Het verband tussen Cartesische en veralgemeende snelheden is dan:

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k.$$

Hierin zijn de partiële afgeleiden  $\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}$  functies van de  $q_k$  (niet van  $\dot{q}_k$ ). Bijgevolg is de kinetische energie een *homogene veelterm van graad 2* in de veralgemeende snelheden:

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 = \sum_{k,\ell} \dot{q}_k \dot{q}_\ell \underbrace{\left( \sum_i \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\ell} \right)}_{\text{functie van } q_k \text{ alleen}}.$$

Omdat de krachten conservatief zijn, hangt de potentiaal  $V$  enkel van de  $q_k$  af (niet van  $\dot{q}_k$  of expliciet van  $t$ ). De Lagrangiaan  $L = T - V$  is dus *niet expliciet van de tijd afhankelijk*.

### De Hamiltoniaan en energiebehoud

We berekenen de totale tijdsafgeleide van  $L(q_k(t), \dot{q}_k(t))$ :

$$\frac{d}{dt} L = \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k.$$

We substitueren de Lagrangevergelijking  $\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$  in de eerste som:

$$\frac{d}{dt} L = \sum_k \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \dot{q}_k + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k = \frac{d}{dt} \left( \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right).$$

In de laatste stap hebben we de productregel voor tijdsafgeleide in omgekeerde richting toegepast. Herschikken geeft:

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L \right) = 0.$$

### Definitie – Hamiltoniaan

De functie

$$h = \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L = \sum_k p_k \dot{q}_k - L$$

heet de *Hamiltoniaan* van het systeem.

We hebben aangetoond dat  $\frac{dh}{dt} = 0$ , d.w.z. de Hamiltoniaan is een eerste integraal van de beweging. Maar wat stelt  $h$  fysisch voor?

## De stelling van Euler en de interpretatie van de Hamiltoniaan

Om de Hamiltoniaan te interpreteren, gebruiken we de stelling van Euler voor homogene functies.

### Stelling – Euler

Als  $f(x_1, x_2, \dots)$  een homogene functie van graad  $n$  is (d.w.z.  $f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots) = \lambda^n f(x_1, x_2, \dots)$ ), dan geldt:

$$\sum_k x_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = n f(x_1, x_2, \dots).$$

*Bewijs.* Leid de definiërende eigenschap  $f(\lambda x_k) = \lambda^n f(x_k)$  af naar  $\lambda$ , en stel dan  $\lambda = 1$ . □

Omdat  $T$  een homogene veelterm van graad 2 is in de  $\dot{q}_k$ , geeft de stelling van Euler:

$$\sum_k \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = 2T.$$

Omdat  $V$  niet van de  $\dot{q}_k$  afhangt, is  $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = 0$ , zodat:

$$\sum_k \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = 2T.$$

De Hamiltoniaan wordt dan:

$$h = 2T - L = 2T - (T - V) = T + V = E,$$

de *totale mechanische energie* van het systeem.

**Stelling – Energiebehoud**

Voor een systeem met holonome tijdsonafhankelijke bindingen en conservatieve krachten is de totale energie  $h = T + V = E$  een behouden grootte.

Dit is een elegante afleiding van het energiebehoud direct vanuit de Lagrangiaan.

**Wanneer is energiebehoud niet geldig? Tijdsafhankelijke bindingen**

De bovenstaande afleiding steunde op twee aannames: tijdsonafhankelijke bindingen en conservatieve krachten. We bekijken wat er verandert als de bindingen *wel* tijdsafhankelijk zijn.

**Tijdsafhankelijke transformatie.** Als de bindingen tijdsafhankelijk zijn, geldt:

$$\mathbf{r}_i \equiv \mathbf{r}_i(q_k, t),$$

en het verband tussen snelheden bevat een extra term:

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}.$$

De kinetische energie is niet langer puur kwadratisch in de  $\dot{q}_k$ , maar bevat ook lineaire en constante termen:

$$T = T_2 + T_1 + T_0,$$

waarbij:

$$T_2 = \sum_{k,\ell} \dot{q}_k \dot{q}_\ell \sum_i \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\ell}, \quad (\text{kwadratisch in } \dot{q}_k)$$

$$T_1 = \sum_k \dot{q}_k \sum_i m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}, \quad (\text{lineair in } \dot{q}_k)$$

$$T_0 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2. \quad (\text{onafhankelijk van } \dot{q}_k)$$

**Tijdsafhankelijke Lagrangiaan.** De potentiaal, uitgedrukt via de tijdsafhankelijke transformatie, verkrijgt ook een expliciete tijdsafhankelijkheid:  $V \equiv V(q_k, t)$ . De Lagrangiaan  $L = T - V \equiv L(q_k, \dot{q}_k, t)$  hangt nu *expliciet* van de tijd af.

De tijdsafgeleide van  $L$  bevat nu een extra term:

$$\frac{d}{dt} L(q_k, \dot{q}_k, t) = \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial t}.$$

De afleiding gaat analoog, maar nu krijgen we:

$$\frac{dh}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} = 0,$$

waarbij de Hamiltoniaan nog steeds gedefinieerd is als  $h = \sum_k p_k \dot{q}_k - L$ .

Omdat  $\frac{\partial L}{\partial t} \neq 0$  in het algemeen, is  $h$  *niet behouden*. Dit is fysisch begrijpelijk: via de tijdsafhankelijke bindingen kan energie worden overgedragen aan het systeem van buitenaf.

**Hamiltoniaan is niet de totale energie.** Bovendien correspondeert de Hamiltoniaan in dit geval niet meer met de totale energie. Via de stelling van Euler op  $T_2$  en  $T_1$  (de enige homogene functies van graad resp. 2 en 1) vindt men:

$$\begin{aligned}h &= \sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L = T_1 + 2T_2 - (T - V) \\ &= T_1 + 2T_2 - (T_0 + T_1 + T_2 - V) = T_2 - T_0 + V \\ &\neq T + V.\end{aligned}$$

**Opmerking.** Samenvatting: in het standaardgeval (tijdsafhankelijke bindingen, conservatieve krachten) is de Hamiltoniaan gelijk aan de totale energie en is ze behouden. Met tijdsafhankelijke bindingen: noch energiebehoud, noch is de Hamiltoniaan de totale energie.

## Intermezzo: de structuur van het Lagrange-probleem

Voor we verdergaan met hoofdstuk 3, is het nuttig om even stil te staan bij de algemene structuur van het probleem dat we proberen op te lossen en de rol die de Lagrangevergelijkingen daarin spelen.

### Het algemene mechanische probleem

Het fundamentele probleem in de klassieke mechanica is het volgende: gegeven  $N$  deeltjes met massa's  $m_i$ , die bewegen onder invloed van externe krachten, interne krachten op elkaar, en eventuele bindingen, bepaal de baan  $\mathbf{r}_i(t)$  van elk deeltje als functie van de tijd.

De Newtoniaanse bewegingsvergelijkingen vormen een stelsel van tweede-orde differentiaalvergelijkingen:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i(t) = \mathbf{F}_i(\{\mathbf{r}_j(t)\}, \{\dot{\mathbf{r}}_j(t)\}, t).$$

Een algemene oplossing hangt af van beginvoorwaarden: de posities  $\{\mathbf{r}_i(t_0)\}$  en snelheden  $\{\dot{\mathbf{r}}_i(t_0)\}$  op een begintijdstip  $t_0$ . Daarna bepalen de bewegingsvergelijkingen de verdere evolutie volledig.

**Eenvoudig voorbeeld.** Één vrij deeltje (zonder krachten), met 3 vrijheidsgraden:

$$m \ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{0}.$$

De algemene oplossing is  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{A}t + \mathbf{B}$ , met 6 integratieconstanten ( $\mathbf{A}$  en  $\mathbf{B}$  elk 3 componenten). Voor een specifieke oplossing met beginvoorwaarden  $\mathbf{r}(t_0)$  en  $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$ :

$$\mathbf{r}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t_0)(t - t_0) + \mathbf{r}(t_0).$$

### Rol van veralgemeende coördinaten en de Lagrangevergelijkingen

Holonome bindingen worden verwerkt door goedgekozen veralgemeende coördinaten  $q_1, \dots, q_{n_q}$ . De Cartesische coördinaten:

$$\mathbf{r}_i(t) \equiv \mathbf{r}_i(q_k(t), t)$$

voldoen dan automatisch aan alle bindingsvoorwaarden. Het probleem is omgezet naar het bepalen van de onbekende functies  $q_k(t)$  in de  $n_q$ -dimensionale configuratieruimte.

De Lagrangevergelijkingen bepalen de tijdsevolutie van deze veralgemeende coördinaten. Ook dit zijn tweede-orde differentiaalvergelijkingen; een specifieke oplossing vereist dus  $2n_q$  beginvoorwaarden (de beginwaarden  $q_k(t_0)$  en beginsnelheden  $\dot{q}_k(t_0)$ ).

Zodra de functies  $q_k(t)$  gekend zijn, kan men via de transformatieformule  $\mathbf{r}_i(t) = \mathbf{r}_i(q_k(t), t)$  onmiddellijk de Cartesische posities van alle deeltjes op elk tijdstip voorspellen. Het probleem is opgelost.

## Hoofdstuk 3: Centrale krachtproblemen

### Inleiding

In dit hoofdstuk bestuderen we de beweging van een deeltje onder invloed van een *centrale kracht*. Dit is een kracht die op elk moment gericht is *langs de positievector*  $\mathbf{r}$  van het deeltje ten opzichte van een vast krachtcentrum in de oorsprong. Meer precies: de kracht heeft altijd de richting van de verbindingslijn tussen het deeltje en het krachtcentrum.

Het voornaamste voorbeeld is de gravitatiewet: de zon (in de oorsprong) trekt een planeet aan met een kracht gericht langs de verbindingslijn. Andere voorbeelden zijn de elektrostatische kracht (Coulomb) en de harmonische oscillator.

We beginnen met een slimme herschrijving van het tweedelenprobleem (twee deeltjes die op elkaar inwerken) als een éénlichaamsprobleem (één deeltje in een extern krachtenveld). Daarna leggen we de fundamentele behoudswetten vast, reduceren we het probleem stap voor stap, en classificeren we de mogelijke banen. Ten slotte lossen we het Kepler-probleem (zwaartekracht  $\sim 1/r^2$ ) volledig op en introduceren we de Laplace-Runge-Lenz vector als bijzondere behouden grootte.

## Reductie van het twee- naar het éénlichaamsprobleem (G3.1)

### Opzet en motivatie

In de praktijk gaat het om twee deeltjes die op elkaar inwerken: denk aan zon en planeet, of twee geladen deeltjes. We zullen aantonen dat dit probleem met zes vrijheidsgraden perfect equivalent is met een éénlichaamsprobleem, waarbij slechts de relatieve positie van de twee deeltjes evolueert.

Beschouw twee deeltjes met massa's  $m_1$  en  $m_2$ , die op elkaar een conservatieve kracht uitoefenen afkomstig van een potentiaal  $V$ :

$$\mathbf{F}_{21} = -\nabla_1 V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \quad \mathbf{F}_{12} = -\nabla_2 V(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = -\mathbf{F}_{21}.$$

Twee eigenschappen van de potentiaal zijn hier wezenlijk:

- **Translatie-invariantie:** de kracht tussen de twee deeltjes mag niet afhangen van een willekeurige keuze van oorsprong. Bijgevolg hangt  $V$  enkel van de *verschilvector*  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  af.
- **Zwakke wet van actie en reactie:** de potentiaal moet symmetrisch zijn,  $V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = V(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$ , zodat de krachten op de twee deeltjes gelijk en tegengesteld zijn.

### Keuze van veralgemeende coördinaten

Het systeem heeft 6 vrijheidsgraden. In plaats van de absolute posities  $\mathbf{r}_1$  en  $\mathbf{r}_2$  te gebruiken als coördinaten, kiezen we twee nieuwe vectoren die de fysica beter beschrijven:

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (\text{positie van het massamiddelpunt}),$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \quad (\text{relatieve positie van deeltje 2 t.o.v. deeltje 1}).$$

We inverteer deze relaties om  $\mathbf{r}_1$  en  $\mathbf{r}_2$  te vinden:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}.$$

De tijdsafgeleiden geven het verband tussen de snelheden:

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\mathbf{R}} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}}, \quad \dot{\mathbf{r}}_2 = \dot{\mathbf{R}} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}}.$$

## De Lagrangiaan in de nieuwe coördinaten

We substitueren de snelheden in de kinetische energie  $T = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2$ . Na uitwerking (de gemengde termen vallen weg door de definitie van het massamiddelpunt) vindt men:

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\dot{\mathbf{r}}^2.$$

De totale Lagrangiaan  $L = T - V(\mathbf{r})$  wordt:

$$L = \underbrace{\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\mathbf{R}}^2}_{\text{beweging massamiddelpunt}} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\dot{\mathbf{r}}^2}_{\text{relatieve beweging}} - V(\mathbf{r}).$$

De Lagrangiaan valt uiteen in twee *onafhankelijke* delen: één dat enkel afhangt van  $\mathbf{R}$  en één dat enkel afhangt van  $\mathbf{r}$ . Omdat de potentiaal  $V(\mathbf{r})$  niet afhangt van  $\mathbf{R}$ , komen de coördinaten  $\mathbf{R}$  niet expliciet voor in de Lagrangiaan en zijn ze dus *cyclisch*. Volgens de Lagrangevergelijkingen blijven de bijhorende canonische momenten

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{R}}} = (m_1 + m_2)\dot{\mathbf{R}}$$

constant (omdat dus  $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{R}} = 0$ ). Dit zijn precies de componenten van de totale impuls van het systeem. Hieruit volgt dat  $\dot{\mathbf{R}}$  constant is, zodat het massamiddelpunt een eenparige rechte beweging uitvoert.

## Het effectieve éénlichaamsprobleem

De beweging van de relatieve coördinaat  $\mathbf{r}$  wordt bepaald door de Lagrangiaan:

$$L_{\text{rel}} = \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r}),$$

waarbij de *gereduceerde massa* is gedefinieerd als:

$$\mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}, \quad \text{of equivalenter: } \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}.$$

Dit is exact de Lagrangiaan van *één* deeltje met massa  $\mu$  dat beweegt in de potentiaal  $V(\mathbf{r})$ , opgewekt door een krachtcentrum in de oorsprong.

Twee belangrijke grensgevallen:

- Gelijke massa's  $m_1 = m_2 = m$ : dan is  $\mu = m/2$ .
- Deeltje 1 veel massiever dan deeltje 2 ( $m_1 \gg m_2$ ): dan is  $\mu \approx m_2$ , en het zware deeltje staat effectief stil in de oorsprong.

**Conclusie:** het tweedelenprobleem is volledig equivalent met een éénlichaamsprobleem voor de relatieve coördinaat  $\mathbf{r}$ , waarbij het deeltje een gereduceerde massa  $\mu$  heeft. Vanaf nu werken we met dit éénlichaamsprobleem, waarbij we de gereduceerde massa als “ $m$ ” noteren (we laten de index weg om de notatie eenvoudig te houden).

## Bewegingsvergelijkingen en eerste integralen (G3.2)

### Centrale kracht en sferische symmetrie

Vanaf nu beschouwen we dus één deeltje met massa  $m$  en positievector  $\mathbf{r}$ , onderworpen aan een centrale kracht opgewekt door een krachtcentrum in de oorsprong. De potentiaal  $V(r)$  hangt enkel af van de *afstand*  $r = |\mathbf{r}|$  tot de oorsprong. De bijbehorende kracht is:

$$\mathbf{F} = -\nabla V(r) = -\frac{dV}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r},$$

wat inderdaad een kracht is gericht langs  $\mathbf{r}$  (centraal).

De potentiaal is *sferisch symmetrisch*: hij is invariant voor rotaties rond elke as door de oorsprong. Uit de discussie in hoofdstuk 2 (symmetrie en behoudswetten) volgt dat het draaimoment behouden is voor rotaties rond elke as. Het draaimoment  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}}$  is dus een behouden *vector*grootte.

Dit kan ook rechtstreeks ingezien worden: het krachtmoment  $\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$  verdwijnt voor een centrale kracht (want  $\mathbf{F}$  is evenwijdig met  $\mathbf{r}$ ), zodat  $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{N} = \mathbf{0}$ .

### De beweging is vlak

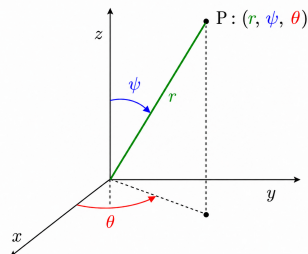
Omdat  $\mathbf{L}$  constant is in de tijd, staat op elk moment  $\mathbf{r}(t)$  loodrecht op  $\mathbf{L}$ . Dit betekent dat het deeltje zich te allen tijde bevindt in het vlak door de oorsprong  $O$  dat loodrecht staat op de vaste vector  $\mathbf{L}$ .

*Beweging onder een centrale kracht is dus altijd beweging in een vast vlak.*

**Speciaal geval  $\mathbf{L} = \mathbf{0}$ .** Als het draaimoment nul is, is er geen vaste vlakrichting. Maar we kunnen aantonen dat de beweging dan langs een rechte door de oorsprong verloopt. We schakelen over naar bolcoördinaten  $(r, \psi, \theta)$ :

$$x = r \sin \psi \cos \theta, \quad y = r \sin \psi \sin \theta, \quad z = r \cos \psi,$$

waarbij  $r$  de afstand tot de oorsprong is,  $\psi$  de poolhoek (t.o.v. de  $z$ -as), en  $\theta$  de azimuthale hoek.



**Afleiding van de snelheidsvector in bolcoördinaten** We starten van

$$\mathbf{r} = (r \sin \psi \cos \theta, r \sin \psi \sin \theta, r \cos \psi).$$

Afleiden naar de tijd en groeperen per richting:

$$\dot{\mathbf{r}} = \begin{cases} \dot{r} \sin \psi \cos \theta + r \dot{\psi} \cos \psi \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \psi \sin \theta \\ \dot{r} \sin \psi \sin \theta + r \dot{\psi} \cos \psi \sin \theta + r \dot{\theta} \sin \psi \cos \theta \\ \dot{r} \cos \psi - r \dot{\psi} \sin \psi \end{cases}$$

De bijhorende eenheidsvectoren zijn:

$$\begin{cases} \mathbf{n}_r = (\sin \psi \cos \theta, \sin \psi \sin \theta, \cos \psi), \\ \mathbf{n}_\psi = (\cos \psi \cos \theta, \cos \psi \sin \theta, -\sin \psi), \\ \mathbf{n}_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta, 0). \end{cases}$$

Hieruit volgt:

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \mathbf{n}_r + r \dot{\psi} \mathbf{n}_\psi + r \dot{\theta} \sin \psi \mathbf{n}_\theta.$$

- **Radiaal**: naar/van de oorsprong.
- $\psi$ : kantelbeweging.
- $\theta$ : rotatie rond de  $z$ -as.

Dus de snelheidsvector in bolcoördinaten schrijft men als:

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \mathbf{n}_r + r \dot{\psi} \mathbf{n}_\psi + r \dot{\theta} \sin \psi \mathbf{n}_\theta,$$

met drie orthonormale eenheidsvectoren ( $\mathbf{n}_r, \mathbf{n}_\psi, \mathbf{n}_\theta$ ). De kinetische energie is:

$$T = \frac{1}{2} m \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\psi}^2 + r^2 \sin^2 \psi \dot{\theta}^2 \right).$$

De voorwaarde  $\mathbf{L} = \mathbf{0}$  impliceert  $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$ , wat uitgewerkt geeft  $\dot{\psi} = 0$  en  $\dot{\theta} = 0$ . De richting van het deeltje blijft dus constant: de beweging is langs een rechte door de oorsprong.

## Overgang naar vlakke poolcoördinaten

Voor het geval  $\mathbf{L} \neq \mathbf{0}$  kiezen we de positieve  $z$ -as langs de vaste richting van  $\mathbf{L}$ . Het deeltje beweegt dan in het  $(x, y)$ -vlak, zodat de poolhoek de vaste waarde  $\psi = \pi/2$  aanneemt ( $\dot{\psi} = 0$ ). De drie-dimensionale bolcoördinaten reduceren tot de twee-dimensionale *vlakke poolcoördinaten*  $(r, \theta)$ .

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \implies \begin{cases} \mathbf{n}_r = (\cos \theta, \sin \theta) \\ \mathbf{n}_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta) \end{cases}$$

De kinematische grootheden vereenvoudigen tot:

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \mathbf{n}_r + r \dot{\theta} \mathbf{n}_\theta, \quad T = \frac{1}{2} m \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right).$$

De Lagrangiaan in vlakke poolcoördinaten is:

$$L = T - V(r) = \frac{1}{2} m \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) - V(r).$$

## Eerste integraal 1: behoud van draaimoment

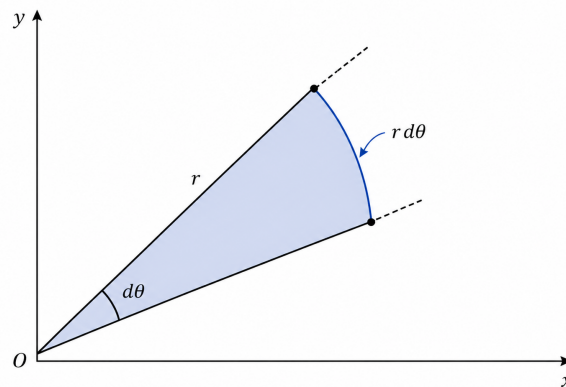
De hoek  $\theta$  verschijnt niet expliciet in de Lagrangiaan (enkel  $\dot{\theta}$  doet dat). Bijgevolg is  $\theta$  een *cyclische coördinaat*. Het canonisch moment is:

$$p_{\theta} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta} = \ell,$$

een behouden grootte. De grootte  $\ell = |\mathbf{L}|$  van het draaimoment is constant. Dit is onze eerste integraal van de beweging. Dit impliceert nogmaals dat het draaimoment behouden is.

**De wet der perken (tweede wet van Kepler).** In een tijdsinterval  $dt$  zwiept de positievector een oppervlakje  $dA$  uit (zie Fig.):

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta.$$



De *perksnelheid* (oppervlak per tijdseenheid) is:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{\ell}{2m} = \text{constante}.$$

In gelijke tijdsintervallen wordt dus een gelijk oppervlak bestreken. Dit is de **tweede wet van Kepler**, en ze geldt voor *elke* centrale kracht, niet alleen voor de zwaartekracht.

## Bewegingsvergelijking voor $r$

De Lagrangevergelijking voor de coördinaat  $r$  volgt uit:

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{\partial V}{\partial r}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}.$$

Dit geeft:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0.$$

We gebruiken het draaimomentsebehoud  $mr^2\dot{\theta} = \ell$ , dus  $\dot{\theta} = \ell/(mr^2)$ , om de  $\dot{\theta}$ -afhankelijkheid te elimineren:

$$m\ddot{r} - \frac{\ell^2}{mr^3} + \frac{\partial V}{\partial r} = 0.$$

Dit is een *tweede-orde* differentiaalvergelijking voor de onbekende functie  $r(t)$ , volledig ontkoppeld van  $\theta(t)$ .

## Eerste integraal 2: behoud van energie

De totale energie is behouden (het systeem is conservatief met tijdsonafhankelijke bindingen):

$$E = T + V = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + V(r).$$

Via draaimomentsebehoud ( $mr^2\dot{\theta} = \ell$ ) elimineert men opnieuw  $\dot{\theta}$ :

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} + V(r).$$

Dit is een *eerste-orde* differentiaalvergelijking voor  $r(t)$ .

### Formele oplossing: $r(t)$ en $\theta(t)$

Uit de energiebehoudsvergelijking kan men  $\dot{r}$  oplossen:

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \left( E - V(r) - \frac{\ell^2}{2mr^2} \right)}.$$

Het teken (+ of -) hangt ervan af of het deeltje zich verwijderd van of nadert tot het krachtcentrum. Scheiden van variabelen geeft:

$$\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left( E - V(r) - \frac{\ell^2}{2mr^2} \right)}} = \pm dt,$$

en integreren van begintijdstip  $t_0$  (op afstand  $r(t_0)$ ) naar tijdstip  $t$  (op afstand  $r$ ) levert:

$$t - t_0 = \int_{r(t_0)}^r \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m} \left( E - V(r') - \frac{\ell^2}{2mr'^2} \right)}}.$$

Dit geeft  $t$  als functie van  $r$ ; de inverse  $r(t)$  bepaalt men, minstens formeel. Eens  $r(t)$  bekend is, volgt  $\theta(t)$  uit draaimomentsebehoud:

$$\theta(t) - \theta(t_0) = \frac{\ell}{m} \int_{t_0}^t \frac{dt'}{r^2(t')}.$$

De volledige baan in vlakke poolcoördinaten,  $r(t)$  en  $\theta(t)$ , is hiermee bepaald.

**Integratieconstanten.** De oplossing bevat vier integratieconstanten: de energie  $E$ , het draaimoment  $\ell$ , en de beginpositie  $(r(t_0), \theta(t_0))$ . Dit klopt: we hebben twee tweede-orde differentiaalvergelijkingen (voor  $r$  en  $\theta$ ), wat in totaal vier constanten vereist. Door het bestaan van de twee eerste integralen  $E$  en  $\ell$  hoefden we slechts twee kwadraturen uit te voeren in plaats van de gebruikelijke vier.

## Equivalent ééndimensionaal probleem en classificatie van orbitalen (G3.3)

### Algemene eigenschappen uit behoudswetten

Uit behoud van draaimoment

$$mr^2\dot{\theta} = \ell > 0 \quad (\text{want } \ell = |\mathbf{L}|)$$

volgt onmiddellijk dat

$$\dot{\theta} = \frac{\ell}{mr^2} > 0.$$

Hieruit besluiten we dat de hoek  $\theta(t)$  een monotoon stijgende functie van de tijd is. Met andere woorden: als we  $\mathbf{L}$  langs de positieve  $z$ -as kiezen, zal het deeltje in het  $(x, y)$ -vlak steeds in tegenwijzerzin bewegen.

Verder ligt, voor gegeven energie  $E$  en draaimoment  $\ell$ , de radiale snelheid volledig vast via energiebehoud:

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \left( E - V(r) - \frac{\ell^2}{2mr^2} \right)}.$$

Het teken  $\pm$  geeft aan of het deeltje zich naar het krachtcentrum toe beweegt ( $\dot{r} < 0 \Rightarrow r$  dalend) of ervan weg ( $\dot{r} > 0 \Rightarrow r$  stijgend).

### De fictieve potentiaal

De energiebehoudsvergelijking

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{V(r) + \frac{\ell^2}{2mr^2}}_{V'(r)}$$

heeft precies de structuur van een *ééndimensionaal energiebehoud*. Het deeltje gedraagt zich als een fictief ééndimensionaal deeltje dat beweegt langs de  $r$ -as onder invloed van de *fictieve potentiaal*:

$$V'(r) = V(r) + \frac{\ell^2}{2mr^2}.$$

De twee termen hebben een duidelijke fysische betekenis:

- $V(r)$ : de werkelijke (bvb. attractieve) potentiaal.
- $\frac{\ell^2}{2mr^2}$ : de *centrifugale barrière*, altijd repulsief (positief en divergerend voor  $r \rightarrow 0$ ). Dit weerspiegelt de neiging van het deeltje om weg te vliegen door zijn draaimoment.

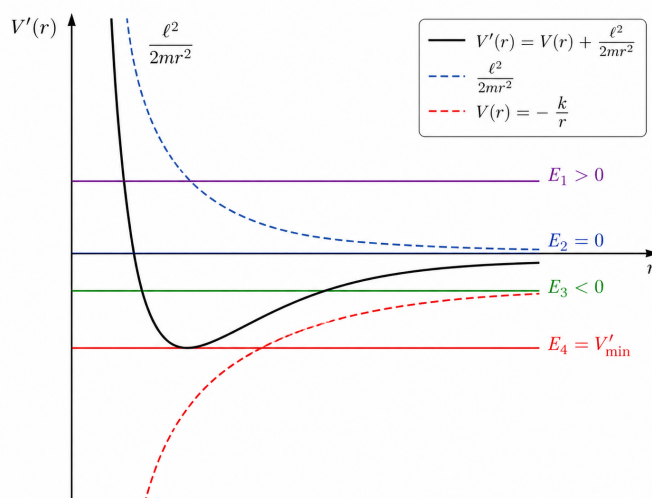
De kracht in het fictieve ééndimensionaal probleem is:

$$F'(r) = -\frac{dV'}{dr} = -\frac{dV}{dr} + \frac{\ell^2}{mr^3},$$

wat exact de rechterzijde is van de bewegingsvergelijking  $m\ddot{r} = F'(r)$ .

Dit bevestigt dat de radiale beweging volledig equivalent is met een ééndimensionaal probleem in de potentiaal  $V'(r)$ .

## Klassificatie van orbitalen via de fictieve potentiaal



Figuur 1: Fictieve potentiaal

Door de fictieve potentiaal  $V'(r)$  te plotten als functie van  $r$  (zie Fig. voor het geval van een attractieve  $r^{-2}$ -kracht), kan men de aard van de baan aflezen zonder de differentiaalvergelijking te hoeven oplossen.

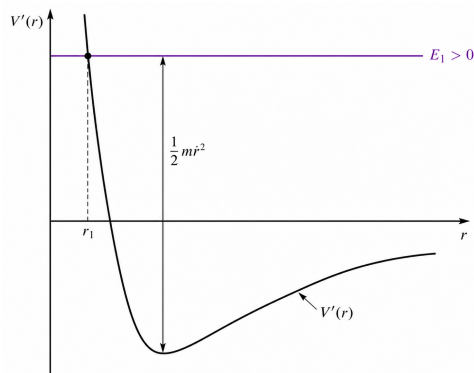
Een horizontale lijn op hoogte  $E$  op de grafiek stelt een bepaalde energie voor. De radiale kinetische energie is:

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = E - V'(r) \geq 0.$$

Het deeltje kan enkel in het gebied  $V'(r) \leq E$  bewegen; gebieden waar  $V'(r) > E$  zijn klassiek verboden. De afstanden waar  $V'(r) = E$  zijn de *keerpunten* van de beweging; hier is  $\dot{r} = 0$  en klinkt de radiale snelheid van teken.

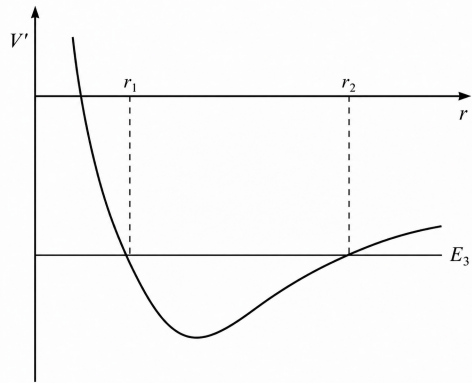
Een centraal principe: de radiale snelheid  $\dot{r}(t)$  is een continue functie van de tijd. Ze kan enkel van teken veranderen als ze nul doorgaat, d.w.z. alleen op een keerpunt.

**Geval  $E = E_1 > 0$  (hoge positieve energie, zie Fig. hieronder).** Er is slechts één keerpunt  $r_1$  (waar  $E = V'(r)$ ): de minimale nadering tot het krachtcentrum. Het deeltje komt van  $r = \infty$  nadert, stuit terug bij  $r_1$ , en verwijdert zich dan tot oneindig. Dit is een *ongebonden* baan: het deeltje vliegt weg en keert niet terug.



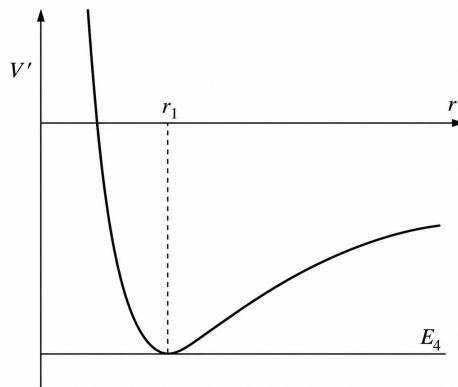
**Geval  $E = E_2 = 0$ .** Kwalitatief hetzelfde als  $E_1 > 0$ : één keerpunt, ongebonden baan. Op grote afstand wordt de kinetische energie nul (het deeltje “stopt” op oneindig).

**Geval  $E = E_3 < 0$  (negatieve energie, zie Fig. hieronder).** Er zijn nu twee keerpunten  $r_1$  en  $r_2$  (de *apsidale afstanden*). De beweging is beperkt tot het ringvormige gebied  $r_1 \leq r \leq r_2$ . Het deeltje oscilleert steeds tussen de minimale  $r_1$  en maximale  $r_2$  afstand: dit is een *gebonden* baan.



**Opmerking.** Een gebonden baan is niet noodzakelijk gesloten! De orbitaal is alleen gesloten als de hoek die afgelegd wordt tussen twee opeenvolgende keerpunten een rationaal veelvoud van  $2\pi$  is. Voor de zwaartekracht (en de harmonische oscillator) is dit wel degelijk het geval.

**Geval  $E = E_4$  (minimum van  $V'(r)$ , zie Fig. hieronder).** De energie is precies gelijk aan het minimum van de fictieve potentiaal, bereikt bij een afstand  $r_1$ . Er is slechts één mogelijke radiale afstand:  $r(t) = r_1 = \text{const}$ . Dit is een *cirkelvormige* baan. Uit draaimomentsebehoud  $mr^2\dot{\theta} = \ell$  volgt dat de hoeksnelheid constant is. We hebben dan eenparige cirkelbeweging.



**Ander type krachtwet.** De analyse is volledig algemeen. Voor andere centrale krachten (bvb. een attractieve  $r^{-4}$ -kracht, zie Fig. 3.9 in het Goldstein handboek) kan het zijn dat de fictieve potentiaal meerdere lokale minima heeft, wat leidt tot meerdere afzonderlijke gebieden van toegelaten beweging. In dergelijke gevallen kunnen zowel gebonden als ongebonden banen coëxisteren voor een gegeven energie.

## Differentiaalvergelijking voor de orbitaal (G3.5)

### De orbitaalvorm $r(\theta)$

Tot nu toe beschreven we de baan via  $r(t)$  en  $\theta(t)$  als functies van de tijd. Vaak zijn we echter meer geïnteresseerd in de *vorm* van de baan: het verband  $r(\theta)$  tussen de radiale afstand en de hoek, zonder tijdsinformatie.

De overgang van  $t$  naar  $\theta$  als onafhankelijke variabele is mogelijk dankzij draaimomentsebehoud. Uit  $\ell = mr^2\dot{\theta}$  volgt:

$$dt = \frac{mr^2}{\ell} d\theta \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dt} = \frac{\ell}{mr^2} \frac{d}{d\theta}. \quad (9)$$

### De substitutie $u = 1/r$

De vergelijkingen worden het eenvoudigst in termen van de nieuwe functie  $u(\theta) = 1/r(\theta)$ . We noteren:

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta}, \quad \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial V}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial r} = -u^2 \frac{\partial V}{\partial u}.$$

### Berekening

Passen we nu (9) toe op  $r$  en  $\dot{r}$ :

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\ell}{mr^2} \frac{dr}{d\theta} \Rightarrow \dot{r} = -\frac{\ell}{m} \frac{du}{d\theta}, \quad \ddot{r} = -\frac{\ell^2}{m^2} u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2}.$$

Ingevuld in  $m\ddot{r} = -\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\ell^2}{mr^3}$  en met  $\frac{\partial V}{\partial r} = -u^2 \frac{\partial V}{\partial u}$  geeft

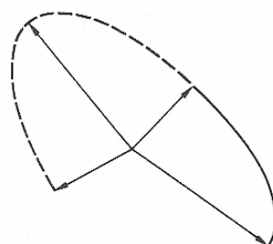
$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u + \frac{m}{\ell^2} \frac{\partial V}{\partial u} = 0.$$

**Bewegingsvergelijking voor de orbitaal.** Na uitwerking resulteert dit dus een nette tweede-orde vergelijking in  $\theta$ :

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u + \frac{m}{\ell^2} \frac{\partial V}{\partial u} = 0.$$

Dit is de *differentiaalvergelijking voor de orbitaal* (ook wel de Binet-vergelijking). Ze heeft enkel een tweede-orde afgeleide naar  $\theta$ , geen eerste orde.

**Spiegelsymmetrie.** Omdat de vergelijking enkel  $u''$  bevat (geen  $u'$ ), is de orbitaal *spiegelsymmetrisch* rond de as die de oorsprong verbindt met een keerpunt. Men hoeft dus slechts de helft van de orbitaal (bvb. tussen twee opeenvolgende keerpunten) te kennen; de rest volgt door spiegeling (zie Fig.).



**Eerste-orde vergelijking voor de orbitaal.** Men kan ook vertrekken van de energie-behoudsvergelijking

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} + V(r),$$

waarbij men de substitutie  $u = 1/r$  toepast (met notatie  $V(u) := V(1/u)$ ). Dit geeft:

$$\frac{2mE}{\ell^2} = \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 + \frac{2m}{\ell^2}V(u).$$

Oplossen naar  $du/d\theta$  geeft de eerste-orde orbitaalvergelijking:

$$\frac{du}{d\theta} = -\sqrt{\frac{2mE}{\ell^2} - u^2 - \frac{2m}{\ell^2}V(u)}.$$

### Wanneer is een orbitaal gesloten?

Door scheiden van variabelen in de eerste-orde orbitaalvergelijking krijgt men de hoekverandering tussen twee opeenvolgende keerpunten:

$$\Delta\theta = \theta_{\max} - \theta_{\min} = \int_{u_{\min}}^{u_{\max}} \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{\ell^2} - u^2 - \frac{2m}{\ell^2}V(u)}}.$$

Een gebonden orbitaal is gesloten als en slechts als  $\Delta\theta = 2\pi q$  met  $q \in \mathbb{Q}$ . In dat geval sluiten de banelementen op elkaar aan na een eindig aantal omwentelingen.

Voor een algemene centrale kracht is een orbitaal *niet* gesloten. Het beroemde *theorema van Bertrand* stelt dat enkel voor twee speciale krachtwetten *alle* gebonden orbitalen gesloten zijn: de Coulomb/gravitatiekracht ( $F \sim r^{-2}$ ) en de harmonische oscillator ( $F \sim r$ ).

## Het Kepler-vraagstuk (G3.7)

### Het gravitatieveld en de fictieve potentiaal

Het Kepler-vraagstuk betreft een attractieve  $r^{-2}$ -kracht, bvb. de zwaartekracht van een zon in de oorsprong op een planeet:

$$F = -\frac{k}{r^2} \mathbf{n}_r \quad (k > 0), \quad V(r) = -\frac{k}{r}.$$

waarbij je  $V(r)$  kan berekenen via  $F = -\frac{dV}{dr}$ .

De fictieve potentiaal (zie sectie 3) is:

$$V'(r) = -\frac{k}{r} + \frac{\ell^2}{2mr^2}.$$

De grafiek van  $V'(r)$  (zie Fig. 1 hierboven) toont een minimum (afgeleide = 0 berekenen) bij:

$$r_{\min, V'} = \frac{\ell^2}{mk}, \quad V'_{\min} = -\frac{mk^2}{2\ell^2}.$$

Fysisch zinvolle energieën voldoen bijgevolg aan  $E \geq -\frac{mk^2}{2\ell^2}$ .

## De eccentriciteit

We definiëren de *eccentriciteit*  $e$  van de baan als:

$$e = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{mk^2}}.$$

De eccentriciteit is reëel en niet-negatief precies wanneer  $E \geq -\frac{mk^2}{2\ell^2}$ , wat overeenstemt met de bovenstaande energiedrempel. De waarde van  $e$  bepaalt het type baan:

- $E > 0 \Rightarrow e > 1$ : ongebonden baan (hyperbool).
- $E = 0 \Rightarrow e = 1$ : grens tussen gebonden en ongebonden (parabool).
- $-\frac{mk^2}{2\ell^2} < E < 0 \Rightarrow 0 < e < 1$ : gebonden baan (ellips).
- $E = -\frac{mk^2}{2\ell^2} \Rightarrow e = 0$ : cirkelvormige baan.

## Keerpunten: perihelion en aphelion

De keerpunten zijn de afstanden waar de radiale snelheid nul is, d.w.z. de oplossingen van  $E = V'(r)$ :

$$E = -\frac{k}{r} + \frac{\ell^2}{2mr^2}.$$

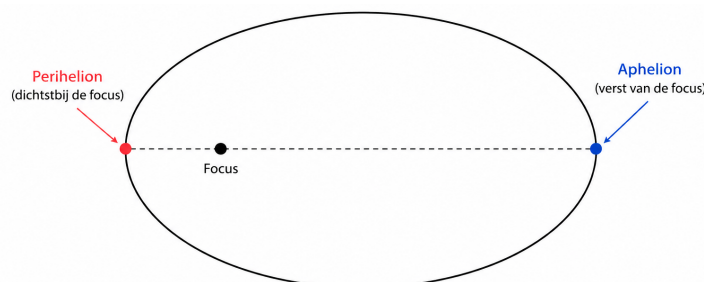
Vermenigvuldiging met  $2mr^2$  en herschrijven als een kwadratische vergelijking in  $u = 1/r$ :

$$u^2 - \frac{2mk}{\ell^2}u - \frac{2mE}{\ell^2} = 0.$$

De twee oplossingen zijn:

$$u_{\pm} = \frac{mk}{\ell^2}(1 \pm e).$$

- $u_+ = \frac{mk}{\ell^2}(1 + e) > 0$  correspondeert altijd met de *minimale* afstand (dichtste nadering), het **perihelion**:  $r_{\text{peri}} = \frac{1}{u_+} = \frac{\ell^2}{mk(1 + e)}$ .
- $u_- = \frac{mk}{\ell^2}(1 - e)$  is voor  $e > 1$  negatief (geen fysische oplossing: voor een hyperbolische baan is er geen aphelion). Voor  $e < 1$  geeft  $u_-$  de *maximale* afstand, het **aphelion**:  $r_{\text{apo}} = \frac{\ell^2}{mk(1 - e)}$ .



## Integratie van de orbitaalvergelijking

We vertrekken van de eerste-orde orbitaalvergelijking met  $V = -ku$ :

$$\frac{du}{d\theta} = -\sqrt{\frac{2mE}{\ell^2} - u^2 + \frac{2mku}{\ell^2}}.$$

We voeren de substitutie  $x = \frac{1}{e} \left( \frac{\ell^2}{mk} u - 1 \right)$  in, zodat de uitdrukking onder de wortel de vorm  $\frac{m^2 k^2 e^2}{\ell^4} (1 - x^2)$  aanneemt. Dan wordt:

$$\frac{mke}{\ell^2} d\theta = -\frac{du}{\sqrt{1-x^2}}$$

Integreren en terugsubstitueren (met  $du = \frac{mke}{\ell^2} dx$ ) geeft:

$$x = \frac{1}{e} \left( \frac{\ell^2}{mk} u - 1 \right) = \cos \theta,$$

(waarbij de integratieconstante is gekozen zodat het perihelion op  $\theta = 0$  ligt). Oplossen naar  $r = 1/u$ :

$$\boxed{\frac{1}{r} = \frac{mk}{\ell^2} (1 + e \cos \theta)}.$$

## Interpretatie: kegelsneden

De vergelijking  $\frac{1}{r} = \frac{mk}{\ell^2} (1 + e \cos \theta)$  is de poolcoördinaten uitdrukking van een *kegelsnede* met een brandpunt in de oorsprong en eccentriciteit  $e$ . We onderscheiden vier gevallen:

Energie	Eccentriciteit	Baan
$E > 0$	$e > 1$	hyperbool (ongebonden)
$E = 0$	$e = 1$	parabool (ongebonden, grenseval)
$-\frac{mk^2}{2\ell^2} < E < 0$	$0 < e < 1$	ellips (gebonden)
$E = -\frac{mk^2}{2\ell^2}$	$e = 0$	cirkel (gebonden, bijzonder geval)

Het perihelion  $r_{\text{peri}}$  ligt op  $\theta = 0$  (maximale  $1/r$ , minimale  $r$ ) en  $r_{\text{aphe}}$  ligt op  $\theta = \pi$ .

## Eigenschappen van de elliptische baan

Voor een gebonden baan ( $e < 1$ ) is de baan een ellips. De halve grote as  $a$  (het gemiddelde van perihelion- en aphelionafstand) is:

$$a = \frac{r_{\text{peri}} + r_{\text{apo}}}{2} = \frac{\ell^2}{mk(1 - e^2)} = -\frac{k}{2E}.$$

De halve kleine as  $b$  volgt uit de ellipseigenschap  $b = a\sqrt{1 - e^2}$ .

**De drie wetten van Kepler.** Uit de bovenstaande resultaten kunnen de drie wetten van Kepler (gepubliceerd omstreeks 1610, ruim vóór Newton) worden afgeleid:

1. **Eerste wet:** een planeet beweegt in een ellips met de zon in één van de brandpunten. Dit volgt rechtstreeks uit de vergelijking van de orbitaal.
2. **Tweede wet (wet der perken):** de voerstraal van een planeet bestrijkt in gelijke tijdsintervallen gelijke oppervlakken. Dit volgt uit het behoud van het draaimoment en geldt voor *elke* centrale kracht.
3. **Derde wet:** het kwadraat van de omlooptijd is evenredig met de derde macht van de halve grote as:  $\tau^2 \propto a^3$ .

We leiden de derde wet af. De constante perksnelheid is  $\frac{dA}{dt} = \frac{\ell}{2m}$ . Gedurende één volledige omloop wordt het volledige oppervlak van de ellips  $\pi ab$  bestreken, zodat de omlooptijd  $\tau$  gelijk is aan:

$$\tau = \frac{\pi ab}{\ell/(2m)} = \frac{2m\pi ab}{\ell}.$$

Met  $b = a\sqrt{1 - e^2}$  en  $\ell^2 = mka(1 - e^2)$  vindt men na substitutie:

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} a^{3/2} \quad \implies \quad \tau^2 = 4\pi^2 \frac{m}{k} a^3$$

Voor de gravitatiekracht is  $k = GMm$ , zodat  $m/k = 1/(GM)$ . De constante in de derde wet is dus  $\frac{4\pi^2}{GM}$ , onafhankelijk van de planeetmassa  $m$ . Dit verklaart waarom de derde wet geldt voor alle planeten (met dezelfde zon als krachtcentrum).

## De Laplace-Runge-Lenz vector (G3.9)

### Een extra behouden grootheid

Voor de specifieke  $r^{-2}$ -krachtwet bestaat er een *extra* behouden vectorgrootheid, bovenop de reeds bekende energie  $E$  en het draaimoment  $\mathbf{L}$ . Dit is de *Laplace-Runge-Lenz (LRL) vector*:

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - \frac{mk}{r} \mathbf{r}.$$

Merk op dat  $\mathbf{A}$  dimensie heeft van  $[\text{impuls}]^2 \cdot [\text{lengte}] = [\text{energie} \cdot \text{massa} \cdot \text{lengte}]$ .

### Bewijs dat $\mathbf{A}$ behouden is

We tonen aan dat  $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \mathbf{0}$ . We vertrekken van de Newtonse bewegingsvergelijking

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F} = -\frac{k}{r^2} \mathbf{n}_r = -\frac{k}{r^3} \mathbf{r}, \text{ en nemen het vectorproduct met } \mathbf{L}:$$

$$\dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{L} = -\frac{k}{r^3} \mathbf{r} \times \mathbf{L}.$$

Omdat  $\mathbf{L}$  constant is, geldt  $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{L}$ . We werken de rechterzijde uit via de dubbele vectorproductidentiteit  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ :

$$\mathbf{r} \times \mathbf{L} = \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}}) = m [(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})\mathbf{r} - r^2\dot{\mathbf{r}}].$$

Verder:  $\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = r\dot{r}$  (tijdsafgeleide van  $r^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$  gedeeld door 2). Dus:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = -\frac{mk}{r^3} [r\dot{r}\mathbf{r} - r^2\dot{\mathbf{r}}] = mk \left[ \frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} - \frac{\dot{r}}{r^2}\mathbf{r} \right] = mk \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{r}}{r} \right).$$

In de laatste stap is gebruik gemaakt van de quotiëntregel:  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} - \frac{\dot{r}}{r^2}\mathbf{r}$ . We vinden dus:

$$\frac{d}{dt} \left( \mathbf{p} \times \mathbf{L} - \frac{mk}{r}\mathbf{r} \right) = \mathbf{0},$$

wat bewijst dat  $\mathbf{A}$  constant is in de tijd.

## Richting en grootte van $\mathbf{A}$

**Richting.** Omdat  $\mathbf{A}$  het vectorproduct van  $\mathbf{p}$  met  $\mathbf{L}$  bevat, staat  $\mathbf{A}$  loodrecht op  $\mathbf{L}$ . Bijgevolg ligt  $\mathbf{A}$  in het bewegingsvlak van het deeltje.

**Grootte en link met de orbitaal.** We berekenen  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}$ . Met  $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) \stackrel{\text{cyclisch}}{=} \mathbf{L} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = L^2 = \ell^2$  (cyclische eigenschap van het gemengde product), en  $\theta$  de hoek tussen  $\mathbf{r}$  en  $\mathbf{A}$ :

$$Ar \cos \theta = \mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - mk \mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = \ell^2 - mk r.$$

Oplossen naar  $r$ :

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{\ell^2} \left( 1 + \frac{A}{mk} \cos \theta \right).$$

Dit is precies de orbitaalvergelijking die we eerder afleidden, met  $e = A/(mk)$ . Bijgevolg:

- $\mathbf{A}$  is gericht naar het perihelion (de minimale afstand, bereikt voor  $\theta = 0$ , de hoek tussen  $\mathbf{A}$  en  $\mathbf{r}$ ).
- De grootte is  $A = mke$ , met  $e$  de eccentriciteit.

## Tellen van onafhankelijke behouden grootheden

De behouden grootheden zijn:  $\mathbf{L}$  (3 componenten),  $\mathbf{A}$  (3 componenten) en  $E$  (1 scalar), samen 7 grootheden. Maar dit is te veel: een systeem van één deeltje met 3 vrijheidsgraden en tweede-orde bewegingsvergelijkingen heeft slechts  $2 \times 3 = 6$  integratieconstanten.

Er moeten dus 2 afhankelijkheidsrelaties bestaan:

1.  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{L} = 0$ :  $\mathbf{A}$  ligt in het bewegingsvlak en staat loodrecht op  $\mathbf{L}$ . Dit geeft 1 relatie.
2.  $A^2 = m^2 k^2 e^2 = m^2 k^2 + 2mE\ell^2$ : de grootte van  $\mathbf{A}$  is uitgedrukt in  $E$  en  $\ell$ . Dit geeft de 2e relatie.

Na aftrek van deze 2 relaties blijft er nog  $7 - 2 = 5$  onafhankelijke informatie over uit  $(\mathbf{L}, \mathbf{A}, E)$ . De vijf onafhankelijke grootheden bepalen volledig de vorm en de ruimtelijke oriëntatie van de baan (grootte van de ellips, eccentriciteit, richting van het perihelion). De 6e integratieconstante beschrijft de positie van het deeltje op zijn baan op het begintijdstip  $t_0$ , en kan niet uit de behoudswetten worden bepaald.

De LRL-vector is bijzonder voor de  $r^{-2}$ -krachtwet: voor een algemeen centraal krachtveld is ze niet behouden. Het bestaan van  $\mathbf{A}$  weerspiegelt een verborgen symmetrie (de  $SO(4)$ -symmetrie voor  $E < 0$ ) die specifiek is voor het Coulomb/Kepler-probleem.

## Hoofdstuk 4: Beweging van starre lichamen — Kinematica

### Inleiding

Tot nu toe beschouwden we systemen van puntdeeltjes. In dit hoofdstuk breiden we de theorie uit naar *starre lichamen*: uitgebreide objecten waarbij alle inwendige afstanden constant blijven. Dit is een idealisatie (elk reëel lichaam is enigszins vervormbaar), maar een uiterst nuttige.

Dit hoofdstuk is gewijd aan de *kinematica* van starre lichamen: we beschrijven *hoe* ze bewegen, zonder ons te bekommeren om de krachten die de beweging veroorzaken. De dynamica (de *Euler*-bewegingsvergelijkingen) volgt in het volgende hoofdstuk.

De centrale uitdaging is: hoe beschrijven we de stand (positie en oriëntatie) van een star lichaam in de ruimte? En hoe beschrijven we hoe die stand verandert in de tijd? Deze vragen worden beantwoord via orthogonale transformaties, Euler-hoeken, de stelling van Euler en de rotatievector.

## Vrijheidsgraden van een star lichaam (G4.1)

### Hoeveel vrijheidsgraden heeft een star lichaam?

Een star lichaam is een verzameling massapunten waarvoor alle onderlinge afstanden constant blijven. De massaverdeling kan discreet zijn (massapunten verbonden door massaloze staven) of continu (zoals een metalen blok of een bolvorm).

Om de toestand van een star lichaam volledig te specificeren, moeten we zijn *positie* (waar zit het?) en zijn *oriëntatie* (hoe staat het gericht?) opgeven. We laten zien dat hiervoor precies **zes onafhankelijke parameters** nodig zijn (zie ook Fig.):

1. **Positie van één referentiepunt** (bvb. het massamiddelpunt): 3 Cartesische coördinaten.
2. **Oriëntatie: positie van een tweede punt** t.o.v. het eerste. Omdat de afstand vast is, kan dit tweede punt slechts bewegen op een bol. Dit vereist 2 hoeken.
3. **Oriëntatie: rotatie om de verbindingsas**. Een derde punt (niet op de verbindingslijn van de eerste twee) kan nog slechts roteren om die verbindingsas (de rechte door punt 1 en 2). Dit vereist nog 1 hoek.

Totaal:  $3 + 2 + 1 = 6$  vrijheidsgraden. Een star lichaam heeft altijd precies zes vrijheidsgraden: drie translatievrijheidsgraden en drie rotatievrijheidsgraden.

## Beschrijving van de oriëntatie: twee assenstelsels

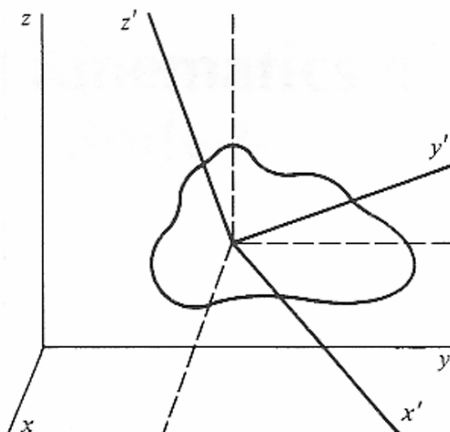


Fig. 4.2

Om de stand van een star lichaam te beschrijven, introduceren we twee Cartesische assenstelsels (zie Fig. 4.2):

- Het **ruimtevast assenstelsel** (*space-fixed frame*)  $Oxyz$ : een inertiaalstelsel, vast in de ruimte.
- Het **lichaamsvast assenstelsel** (*body-fixed frame*)  $O'x'y'z'$ : vast verbonden met het lichaam, zodat alle punten van het lichaam vaste coördinaten hebben in dit stelsel.

De positie van het referentiepunt  $O'$  t.o.v.  $O$  geeft de 3 translationele coördinaten. De *relatieve oriëntatie* van het body-fixed stelsel t.o.v. het space-fixed stelsel beschrijft de 3 rotatievrijheidsgraden. Precies die oriëntatie willen we parametriseren.

## Richtingscosinussen

We gebruiken indices  $i = 1, 2, 3$  voor respectievelijk de  $x$ -,  $y$ - en  $z$ -richting. Laat  $\mathbf{n}_i$  de eenheidsvectoren van het ruimtevast stelsel zijn, en  $\mathbf{n}'_i$  die van het lichaamsvast stelsel. We beschouwen uitsluitend *rechtshandige* assenstelsels, d.w.z.  $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \mathbf{n}_3$  en analoog voor de gepriemde basis (met accenten).

De *richtingscosinussen* zijn de negen scalaire producten:

$$\cos \theta_{ij} = \mathbf{n}'_i \cdot \mathbf{n}_j, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Ze geven de cosinus van de hoek tussen elke  $\mathbf{n}'_i$ -as en elke  $\mathbf{n}_j$ -as. Hiermee kunnen we de eenheidsvectoren in elke basis uitdrukken:

$$\mathbf{n}_i = \sum_j (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}'_j) \mathbf{n}'_j = \sum_j \cos \theta_{ji} \mathbf{n}'_j, \quad \mathbf{n}'_i = \sum_j (\mathbf{n}'_i \cdot \mathbf{n}_j) \mathbf{n}_j = \sum_j \cos \theta_{ij} \mathbf{n}_j.$$

**Transformatie van vectorcomponenten.** Een vector  $\mathbf{G}$  met componenten  $G_i = \mathbf{G} \cdot \mathbf{n}_i$  in het space-fixed frame kan worden uitgedrukt in het body-fixed frame door de ontwikkeling  $\mathbf{n}_i = \sum_j \cos \theta_{ji} \mathbf{n}'_j$  in te vullen in  $\mathbf{G} = \sum_i G_i \mathbf{n}_i$ :

$$\mathbf{G} = \sum_i G_i \mathbf{n}_i = \sum_i G_i \sum_j \cos \theta_{ji} \mathbf{n}'_j = \sum_j \left( \sum_i \cos \theta_{ji} G_i \right) \mathbf{n}'_j.$$

Door de coëfficiënt van  $\mathbf{n}'_j$  af te lezen, verkrijgt men de componenten in het body-fixed frame:

$$G'_j = \mathbf{G} \cdot \mathbf{n}'_j = \sum_i \cos \theta_{ji} G_i.$$

## De orthogonaliteitsrelaties en de transformatiematrix

De negen richtingscosinussen zijn niet onafhankelijk. Omdat zowel de  $\mathbf{n}_i$  als de  $\mathbf{n}'_i$  ortho-normale bases vormen, geldt:

$$\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_k = \delta_{ik} = \sum_n \cos \theta_{ni} \cos \theta_{nk}, \quad (10)$$

want

$$\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_k = \sum_{n,m} \cos \theta_{ni} \cos \theta_{mk} (\mathbf{n}'_n \cdot \mathbf{n}'_m) = \sum_{n,m} \cos \theta_{ni} \cos \theta_{mk} \delta_{nm} = \sum_n \cos \theta_{ni} \cos \theta_{nk}$$

en analoog voor de geprimeerde basis (met accenten):

$$\mathbf{n}'_i \cdot \mathbf{n}'_k = \delta_{ik} = \sum_n \cos \theta_{in} \cos \theta_{kn},$$

De 9 richtingscosinussen zijn niet allemaal vrij: de orthogonaliteitsrelaties leggen 6 voorwaarden op (elke as heeft lengte 1, en elke twee assen staan loodrecht op elkaar), zodat er netto slechts 3 onafhankelijke parameters overblijven.

## Orthogonale transformaties (G4.2)

### Transformatiematrix

We definiëren de **transformatiematrix**  $[O]$  met elementen:

$$[O]_{ij} = \cos \theta_{ij}.$$

De orthogonaliteitsrelaties drukken uit dat  $[O]^T [O] = [1]$  en  $[O][O]^T = [1]$ , waarbij  $[1]$  de  $3 \times 3$  eenheidsmatrix is:

$$([O]^T [O])_{ij} = \sum_k ([O]^T)_{ik} [O]_{kj} = \sum_k [O]_{ki} [O]_{kj} = \sum_k \cos \theta_{ki} \cos \theta_{kj} = \delta_{ij},$$

waarbij men op het laatste gebruikt maakt van vgl.(10). Met andere woorden:  $[O]$  is een *orthogonale matrix*, waarvoor de inverse gelijk is aan de getransponeerde:  $[O]^{-1} = [O]^T$ .

We weten al  $G'_j = \sum_i \cos \theta_{ji} G_i$ , neem nu ipv  $G$  de vectoren  $(x_1, x_2, x_3)$  en  $(x'_1, x'_2, x'_3)$ :

$$x'_j = \sum_i \cos \theta_{ji} x_i \quad \implies \quad [X'] = [O][X],$$

waarbij  $[X]$  en  $[X']$  kolommatrices zijn van de Cartesische coördinaten in respectievelijk het ruimtevast en het lichaamsvast stelsel.

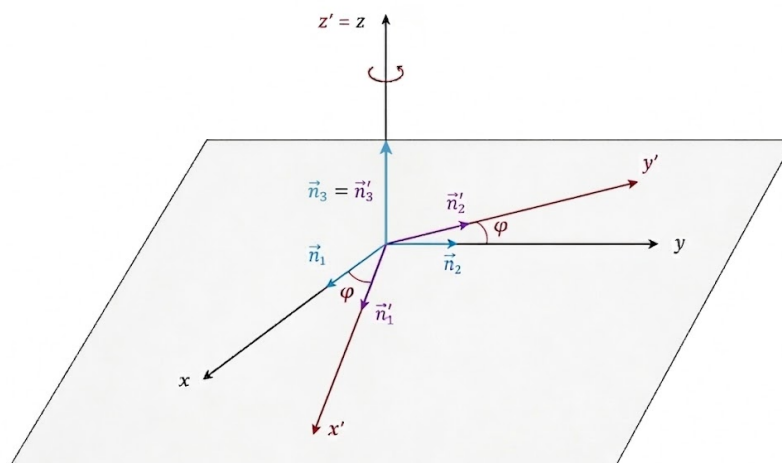
## Passieve en actieve interpretatie

De transformatieregel  $[X'] = [O][X]$  kan op twee manieren worden geïnterpreteerd:

- **Passieve transformatie:**  $[O]$  transformeert de coördinaten van *hetzelfde punt* van het ene assenstelsel naar het andere. Dit is de interpretatie die we tot nu toe gebruikten.
- **Actieve transformatie:**  $[O]$  stuurt een punt met coördinaten  $[X]$  naar een *nieuw punt* met coördinaten  $[X']$ , in een *vast* assenstelsel. Beide interpretaties gebruiken dezelfde wiskunde.

## Voorbeeld: rotatie om de $z$ -as

Een eenvoudig maar belangrijk voorbeeld is een rotatie in tegenwijzerzin over een hoek  $\varphi$  rond de  $z$ -as. De nieuwe  $x'$ -as maakt een hoek  $\varphi$  met de originele  $x$ -as.



Herinner ook dat  $\mathbf{n}'_i \cdot \mathbf{n}_j = \cos \theta_{ij}$  met  $\theta_{ij}$  de hoek tussen  $\mathbf{n}'_i$  en  $\mathbf{n}_j$ , zodat:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{n}'_1 \cdot \mathbf{n}_1 = \cos \varphi & \mathbf{n}'_1 \cdot \mathbf{n}_2 = \sin \varphi & \mathbf{n}'_1 \cdot \mathbf{n}_3 = 0 \\ \mathbf{n}'_2 \cdot \mathbf{n}_1 = -\sin \varphi & \mathbf{n}'_2 \cdot \mathbf{n}_2 = \cos \varphi & \mathbf{n}'_2 \cdot \mathbf{n}_3 = 0 \\ \mathbf{n}'_3 \cdot \mathbf{n}_1 = 0 & \mathbf{n}'_3 \cdot \mathbf{n}_2 = 0 & \mathbf{n}'_3 \cdot \mathbf{n}_3 = 1 \end{array}$$

De bijbehorende transformatiematrix is:

$$[O_z(\varphi)] = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Met de notatie  $[O_z(\varphi)]$  wordt de transformatiematrix bedoeld die hoort bij een rotatie rond de  $z$ -as met een hoek  $\varphi$ , deze notatie komt nog terug (maar wordt niet expliciet gebruikt in de slides).

## Eigenschappen van de transformatiematrix (G4.3)

### Groepseigenschap

De samenstelling van twee opeenvolgende orthogonale transformaties is opnieuw een orthogonale transformatie. Als  $[X'] = [O_1][X]$  en  $[X''] = [O_2][X']$ , dan is  $[X''] = [O_2][O_1][X] = [O_3][X]$ , waarbij  $[O_3] = [O_2][O_1]$  eveneens orthogonaal is (zie vergelijking hieronder).

De inverse van  $[O_3]$  is:

$$[O_3]^{-1} = ([O_2][O_1])^{-1} = [O_1]^{-1}[O_2]^{-1} = [O_1]^T[O_2]^T = ([O_2][O_1])^T = [O_3]^T,$$

zodat  $[O_3]$  inderdaad orthogonaal is. De orthogonale  $3 \times 3$  matrices vormen een groep, aangeduid als  $O(3)$ .

### De determinant: $\pm 1$ en de groep $SO(3)$

Voor elke orthogonale matrix  $[O]$  geldt uit de orthogonaliteitsrelatie  $[O][O]^T = [1]$ :

$$1 = \det[1] = \det([O][O]^T) = (\det[O])^2 \implies \det[O] = \pm 1.$$

**Pariteitsmatrix.** Een voorbeeld van een orthogonale matrix met  $\det[O] = -1$  is de *pariteitsmatrix*:

$$[P] = -[1] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

die overeenkomt met  $x' = -x$ ,  $y' = -y$ ,  $z' = -z$ . Dit keert de oriëntatie van het assenstelsel om: een rechtshandig stelsel wordt linkshandig (want  $\mathbf{n}'_1 \times \mathbf{n}'_2 = -\mathbf{n}'_3$ ).

**Beperking tot  $SO(3)$ .** Tijdens de beweging van een star lichaam verandert de oriëntatie van het body-fixed stelsel continu. Omdat de “handedness” (rechtshandig of linkshandig) van een assenstelsel niet kan veranderen door een continue beweging (een rechtsdraaiende schroef kan door roteren niet in een linksdraaiende veranderen), zijn alleen orthogonale matrices met  $\det[O] = +1$  relevant. Deze vormen de groep  $SO(3)$  (Speciale Orthogonale groep).

Alle matrices met  $\det = -1$  zijn te schrijven als het product van  $[P]$  met een  $SO(3)$ -matrix. Ze worden uitgesloten bij de beschrijving van de oriëntatie van een star lichaam.

## De Euler-hoeken (G4.4)

### Motivatie: een handige parametrisatie van $SO(3)$

We zoeken een handige manier om alle elementen van  $SO(3)$  te beschrijven via drie onafhankelijke parameters. De meest gebruikte parametrisatie zijn de **drie Euler-hoeken**  $(\varphi, \theta, \psi)$ .

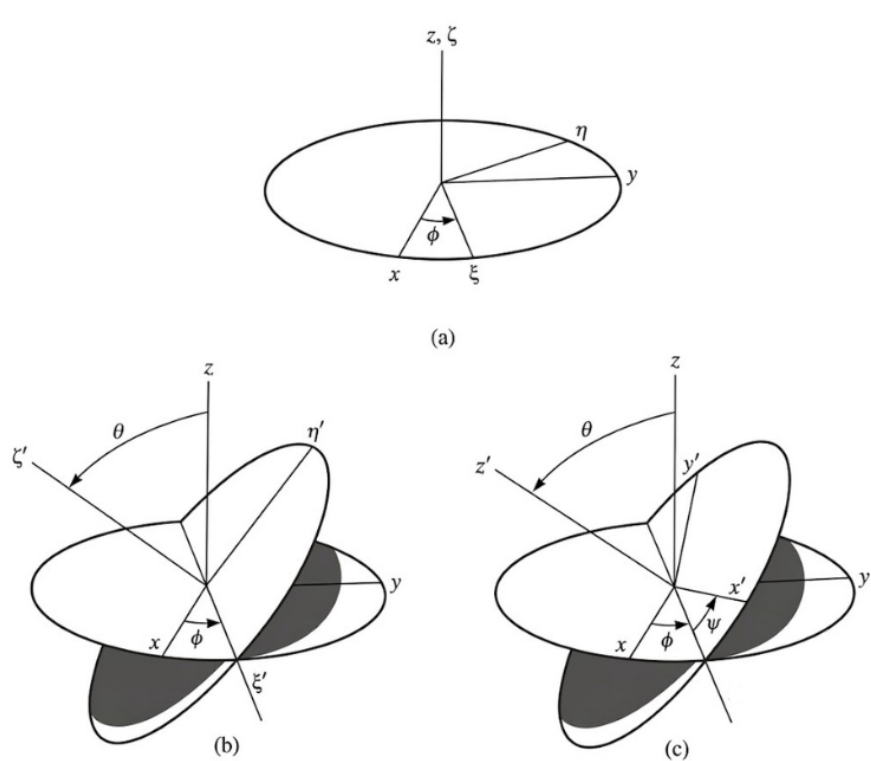
Het basisidee is dat elke oriëntatiewijziging met dezelfde oorsprong van een Cartesisch rechtshandig assenstelsel kan worden bereikt via een opeenvolging van drie elementaire rotaties, elk rond een coördinaatas.

## De drie opeenvolgende rotaties

Gegeven een beginstelsel  $Oxyz$  dat moet worden getransformeerd naar  $Ox'y'z'$  (zie Fig. hieronder):

1. **Roteer rond de  $z$ -as over een hoek  $\phi$ :**  $(x, y, z) \rightarrow (\xi, \eta, \zeta = z)$ , zodat de  $\xi$ -as samenvalt met de snijlijn van het  $(x, y)$ -vlak en het  $(x', y')$ -vlak.
2. **Roteer rond de  $\xi$ -as over een hoek  $\theta$ :**  $(\xi, \eta, \zeta) \rightarrow (\xi' = \xi, \eta', \zeta')$ , zodat  $\zeta' = z'$  en het  $(\xi', \eta')$ -vlak samenvalt met het  $(x', y')$ -vlak.
3. **Roteer rond de  $\zeta'$ -as over een hoek  $\psi$ :**  $(\xi', \eta', \zeta') \rightarrow (x', y', \zeta' = z')$ , zodat de assen volledig samenvallen.

Alle rotaties gebeuren in tegenwijzerzin. De hoeken hebben de volgende bereiken:  $\phi \in [0, 2\pi[$ ,  $\theta \in [0, \pi]$ ,  $\psi \in [0, 2\pi[$ .



## De transformatiematrix als product van drie rotatiematrices

De totale transformatiematrix is het product van de drie elementaire rotatiematrices (eerst hoek  $\phi$  over  $z$ , dan hoek  $\theta$  over  $\xi$ , dan hoek  $\psi$  over  $\zeta'$ ):

$$[O(\phi, \theta, \psi)] = [O_{\zeta'}(\psi)] [O_{\xi}(\theta)] [O_z(\phi)].$$

Expliciet (je kan ze berekenen zoals we bij 4.2 hebben gedaan):

$$[O(\phi, \theta, \psi)] = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Na uitwerking van het matrixproduct:

$$[O(\phi, \theta, \psi)] = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi - \sin \psi \cos \theta \sin \phi & \cos \psi \sin \phi + \sin \psi \cos \theta \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \\ -\sin \psi \cos \phi - \cos \psi \cos \theta \sin \phi & -\sin \psi \sin \phi + \cos \psi \cos \theta \cos \phi & \cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \phi & -\sin \theta \cos \phi & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Als product van drie  $SO(3)$ -matrices is  $[O(\phi, \theta, \psi)]$  zelf orthogonaal met determinant  $+1$ . De inverse transformatie is (LET OP: omgekeerde volgorde van de hoeken):

$$[O(\phi, \theta, \psi)]^T = [O(-\psi, -\theta, -\phi)].$$

want

$$\begin{aligned} [O(\phi, \theta, \psi)]^{-1} &= ([O_{z'}(\psi)][O_{\xi}(\theta)][O_z(\phi)])^{-1} \\ &= [O_z(\phi)]^{-1}[O_{\xi}(\theta)]^{-1}[O_{z'}(\psi)]^{-1} \\ &= [O_z(-\phi)][O_{\xi}(-\theta)][O_{z'}(-\psi)] \\ &= [O(-\psi, -\theta, -\phi)], \end{aligned}$$

aangezien de inverse van een transformatiematrix van een rotatiehoek, gewoon de transformatiematrix is van de tegengestelde rotatiehoek.

**Opmerking.** Andere conventies voor de Euler-hoeken (andere keuze van rotatie-assen) zijn ook in gebruik. De hier beschreven keuze (rotaties achtereenvolgens rond de 3e, 1e en 3e as) is de meest gebruikte in de mechanica. De Euler-hoeken zijn drie onafhankelijke variabelen die als veralgemeende coördinaten in het Lagrange-formalisme kunnen worden gebruikt.

## Stelling van Euler over de beweging van een star lichaam (G4.6)

### Formulering

#### Stelling – Stelling van Euler

Elke algemene verplaatsing van een star lichaam met één punt vast in de ruimte is gelijkwaardig met een rotatie om een bepaalde as door dat vaste punt.

Anders geformuleerd: twee rechtshandige Cartesische assenstelsels met gemeenschappelijke oorsprong kunnen altijd op elkaar worden gelegd door *één enkele rotatie* over een bepaalde hoek rond een bepaalde as door de oorsprong.

In wiskundige termen: elke  $SO(3)$ -matrix beschrijft een rotatie in de 3D-ruimte. Om die rotatie te beschrijven, heb je nodig:

- De richting van de rotatie-as: 2 parameters (bvb. de poolhoeken  $\theta$ ,  $\varphi$  van de eenheidsvector  $\mathbf{n}$  langs de as).
- De rotatiehoek  $\Psi$ : 1 parameter.

Dit is een alternatieve, meer directe parametrisatie van  $SO(3)$  naast de Euler-hoeken.

**Bewijs: elke  $SO(3)$ -matrix heeft eigenwaarde  $+1$** 

Om de stelling te bewijzen, moeten we aantonen dat elke  $SO(3)$ -matrix een eigenwaarde  $\lambda = +1$  heeft (want de bijbehorende eigenvector wijst dan langs de rotatie-as, die onveranderd blijft onder de transformatie).

**Stap 1: Groottebehoud.** Aangezien  $[X]^T[X] = \|X\|^2$  geldt voor de Euclidische norm en  $[X'] = [O][X]$  de transformatie, volgt voor een orthogonale matrix  $[O]$ :

$$[X']^T[X'] = [X]^T[O]^T[O][X] = [X]^T[1][X] = [X]^T[X].$$

Dus:

$$\|X'\| = \|X\|.$$

Dit is eigenschap (1) van een rotatie: de grootte van de positievector verandert niet.

**Stap 2: Bestaan van een vaste richting (eigenwaarde  $+1$ ).** We willen aantonen dat  $\lambda = 1$  een eigenwaarde van  $[O]$  is, want dan bestaat er een eigenvector  $[X] \neq 0$  zodat

$$[X'] = [O][X] = [X].$$

Hier stelt  $[X]$  dus niet een willekeurige vector voor, maar een eigenvector behorende bij de eigenwaarde 1. Deze vector blijft onveranderd onder de transformatie en ligt bijgevolg langs de rotatie-as. We tonen nu aan dat  $\det([O] - [1]) = 0$ , waaruit volgt dat  $\lambda = 1$  een eigenwaarde van  $[O]$  is.

Beschouw:

$$([O] - [1])[O]^T = [O][O]^T - [O]^T = [1] - [O]^T.$$

Neem nu de determinant van beide leden:

$$\det([O] - [1]) \det([O]^T) = \det([1] - [O]^T) \Rightarrow \det([O] - [1]) = \det([1] - [O]^T),$$

omdat  $[O] \in SO(3)$ , dus  $\det([O]^T) = \det([O]) = 1$ .

Verder:

$$\det([O] - [1]) = \det([(O] - [1])^T) = \det([O]^T - [1]) = (-1)^3 \det([1] - [O]^T).$$

want uit elke rij haal je een minteken en we werken met  $3 \times 3$  matrices.

Dus uiteindelijk:

$$\det([O] - [1]) = -\det([O] - [1]),$$

en bijgevolg:

$$\det([O] - [1]) = 0.$$

Hieruit volgt dat  $\lambda = 1$  een eigenwaarde van  $[O]$  is. Bijgevolg heeft elke  $SO(3)$ -matrix minstens één eigenvector die invariant blijft onder de transformatie. Deze eigenvector bepaalt de richting van de rotatie-as.

## De rotatiehoek uit het spoor van de matrix

De hoek waarover gerooteerd wordt, zit vervat in de andere twee eigenwaarden van  $[O]$ . Beschouw bijvoorbeeld de rotatiematrix om de  $z$ -as over een hoek  $\Psi$ :

$$[O_z(\Psi)] = \begin{pmatrix} \cos \Psi & \sin \Psi & 0 \\ -\sin \Psi & \cos \Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De seculiere vergelijking  $\det([O] - \lambda[1]) = 0$  herleidt zich tot:

$$(1 - \lambda)((\cos \Psi - \lambda)^2 + \sin^2 \Psi) = 0,$$

wat naast de al gekende oplossing  $\lambda = 1$ , twee complex toegevoegde wortels heeft:

$$\lambda = \cos \Psi \pm i \sin \Psi = e^{\pm i\Psi}.$$

Omdat het *spoor* (trace) van een matrix gelijk is aan de som van de eigenwaarden, geldt:

$$\text{Tr}[O] = 1 + e^{i\Psi} + e^{-i\Psi} = 1 + 2 \cos \Psi. \quad (11)$$

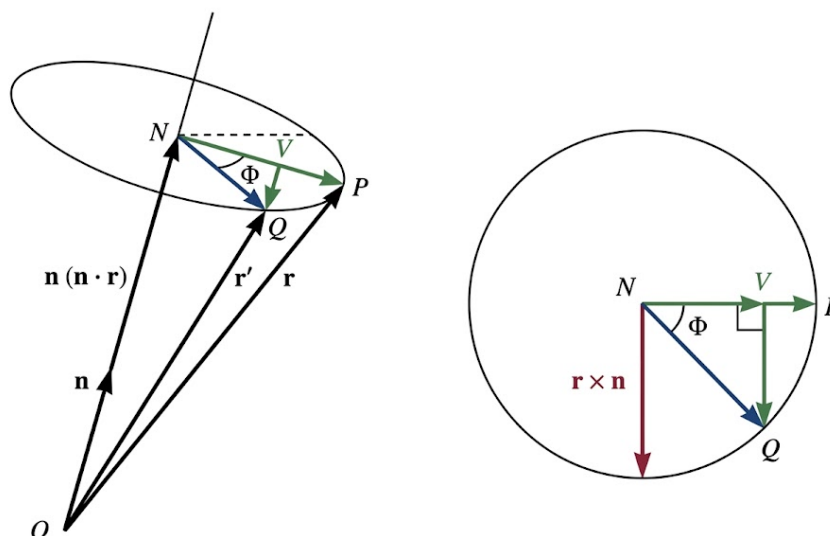
De rotatiehoek  $\Psi$  kan dus worden bepaald uit:

$$\cos \Psi = \frac{\text{Tr}[O] - 1}{2}.$$

## Eindige rotaties van het assenstelsel (G4.7)

### De rotatieformule

We willen de expliciete formule vinden voor de getransformeerde positievector  $\mathbf{r}'$  als we het assenstelsel roteren over een hoek  $\Phi$  in tegenwijzerzin rond een eenheidsvector  $\mathbf{n}$ . We werken vanuit het actieve standpunt: een punt  $P$  met positievector  $\mathbf{r}$  wordt gerooteerd naar een punt  $Q$  met positievector  $\mathbf{r}'$  (zie figuur hieronder).



Geometrisch ligt het punt  $Q$  op een cirkel in een vlak loodrecht op  $\mathbf{n}$ . Het middelpunt van die cirkel is het punt  $N$ , de projectie van  $P$  op de rotatie-as.

De projectie van  $\mathbf{r}$  op de rotatie-as is:

$$\overrightarrow{ON} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{n}.$$

Nu kunnen we ook de vector  $\overrightarrow{NP}$  bepalen:

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NP} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{NP} = \mathbf{r} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{n}.$$

In het rotatievlak speelt ook de vector  $\mathbf{r} \times \mathbf{n}$  een belangrijke rol. Deze staat loodrecht op zowel  $\mathbf{n}$  als op  $\overrightarrow{NP}$ , want met  $\overrightarrow{NP} = \mathbf{r} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{n}$  geldt:

$$(\mathbf{r} \times \mathbf{n}) \cdot \overrightarrow{NP} = (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{r} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{n}) = 0.$$

De grootte van deze vector is:

$$|\mathbf{r} \times \mathbf{n}| = |(\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NP}) \times \mathbf{n}| = |\overrightarrow{NP} \times \mathbf{n}| = |\overrightarrow{NP}|.$$

Dus  $\mathbf{r} \times \mathbf{n}$  heeft dezelfde lengte als  $\overrightarrow{NP}$  en beschrijft de tweede richting in het rotatievlak (zie figuur).

Na een rotatie over een hoek  $\Phi$  kan de vector  $\overrightarrow{NQ}$  worden opgesplitst in twee delen:

De component in de richting van  $\overrightarrow{NP}$  wordt:

$$\overrightarrow{NV} = \cos \Phi \overrightarrow{NP} = \cos \Phi (\mathbf{r} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{n}).$$

De component in de richting van  $\mathbf{r} \times \mathbf{n}$  wordt:

$$\overrightarrow{VQ} = \sin \Phi (\mathbf{r} \times \mathbf{n}).$$

De volledige gerooteerde vector is dan:

$$\mathbf{r}' = \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NV} + \overrightarrow{VQ}.$$

Invullen geeft:

$$\mathbf{r}' = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{n} + \cos \Phi (\mathbf{r} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{n}) + \sin \Phi (\mathbf{r} \times \mathbf{n}).$$

Dit kan herschreven worden tot de klassieke **rotatieformule van Euler**:

$$\boxed{\mathbf{r}' = \cos \Phi \mathbf{r} + (1 - \cos \Phi)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{n} + \sin \Phi (\mathbf{r} \times \mathbf{n})}$$

## Verband tussen rotatiehoek en Euler-hoeken

De stelling van Euler zegt dat elke oriëntatiewijziging overeenkomt met één enkele rotatie over een hoek  $\Phi$  rond een bepaalde as. Diezelfde oriëntatiewijziging kan echter ook worden beschreven via de drie Euler-hoeken  $(\phi, \theta, \psi)$ ; het zijn gewoon twee verschillende parametrisaties van dezelfde  $SO(3)$ -matrix  $[O]$ . Omdat het spoor van een matrix invariant is (onafhankelijk van de basis), moet  $\text{Tr}[O]$  dezelfde waarde geven in beide beschrijvingen.

De rotatiehoek  $\Phi$  voldoet aan  $\text{Tr}[O] = 1 + 2 \cos \Phi$  (zie vgl.(11)). Anderzijds kan het spoor worden berekend uit de uitgewerkte Euler-matrix  $[O(\phi, \theta, \psi)]$  (zie enkele pagina's geleden):

$$\text{Tr}[O] = \cos(\psi + \phi) + \cos \theta (1 + \cos(\psi + \phi)).$$

We stellen  $\frac{1}{2}(1 + \text{Tr}[O])$  gelijk voor beiden, aangezien het makkelijker te berekenen is:

$$1 + \cos \Phi = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta)(1 + \cos(\psi + \phi)).$$

We passen nu de dubbelehoekformule  $1 + \cos \alpha = 2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$  toe op elk van de termen:

$$2 \cos^2\left(\frac{\Phi}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot 2 \cos^2\left(\frac{\psi + \phi}{2}\right),$$

zodat

$$\cos^2\left(\frac{\Phi}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\psi + \phi}{2}\right)$$

dus

$$\cos\left(\frac{\Phi}{2}\right) = \pm \left| \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| \left| \cos\left(\frac{\psi + \phi}{2}\right) \right|$$

Het teken wordt echter vastgelegd door de eis dat bij geen rotatie ( $\Phi = \theta = \phi = \psi = 0$ ) beide leden gelijk aan 1 zijn, zodat we de positieve vierkantswortel nemen:

$$\cos\left(\frac{\Phi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\psi + \phi}{2}\right).$$

Dit legt het verband vast tussen de enkelvoudige rotatiehoek  $\Phi$  en de drie Euler-hoeken.

**Opmerking** (Niet-commutatief karakter van eindige rotaties). Een belangrijk kenmerk van eindige rotaties is dat ze *niet commutatief* zijn: de volgorde van rotaties maakt uit. Dat wil zeggen: eerst roteren rond de  $x$ -as en dan rond de  $z$ -as geeft een andere eindstand dan omgekeerd (zie Fig. 4.9–4.10 in het Goldstein handboek). Dit is een fundamenteel verschil met translaties, die wél commutatief zijn.

## Infinitesimale rotaties (G4.8)

### Vereenvoudiging voor kleine hoeken

We hadden de rotatieformule:

$$\mathbf{r}' = \cos \Phi \mathbf{r} + (1 - \cos \Phi)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n} + \sin \Phi(\mathbf{r} \times \mathbf{n})$$

Voor een *infinitesimale* rotatie over een hoek  $d\Phi$  rond een eenheidsvector  $\mathbf{n}$  vereenvoudigt de rotatieformule sterk. Met  $\cos(d\Phi) \approx 1$  en  $\sin(d\Phi) \approx d\Phi$  tot op eerste orde:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) d\Phi.$$

In matrixnotatie:  $[X'] = ([1] + [\epsilon])[X]$ , waarbij:

$$[\epsilon] = d\Phi \begin{pmatrix} 0 & n_3 & -n_2 \\ -n_3 & 0 & n_1 \\ n_2 & -n_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

want zij  $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$  en  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ , dan geldt:

$$(\mathbf{r} \times \mathbf{n})_1 = x_2 n_3 - x_3 n_2$$

$$(\mathbf{r} \times \mathbf{n})_2 = x_3 n_1 - x_1 n_3$$

$$(\mathbf{r} \times \mathbf{n})_3 = x_1 n_2 - x_2 n_1$$

zodat:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 & n_3 & -n_2 \\ -n_3 & 0 & n_1 \\ n_2 & -n_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Merk ook op dat de matrix  $[\epsilon]$  *antisymmetrisch* is:  $[\epsilon]^T = -[\epsilon]$ .

### Antisymmetrie van infinitesimale rotatiematrices

Dit is geen toeval. Een algemene  $SO(3)$ -matrix die slechts infinitesimaal afwijkt van de eenheidsmatrix schrijven we als  $[O] = [1] + [\epsilon]$ . De orthogonaliteitsvoorwaarde  $[O][O]^T = [1]$  geeft tot op eerste orde in  $[\epsilon]$ :

$$([1] + [\epsilon])([1] + [\epsilon]^T) = [1] + [\epsilon] + [\epsilon]^T + \mathcal{O}(\epsilon^2) = [1],$$

dus:

$$[\epsilon] + [\epsilon]^T = 0.$$

Een antisymmetrische  $3 \times 3$  matrix heeft precies 3 onafhankelijke componenten (de elementen boven de diagonaal), wat overeenkomt met de 3 vrijheidsgraden van de rotatierichting ( $\mathbf{n}$ ) en de rotatiehoek ( $d\Phi$ ).

### Infinitesimale rotaties zijn commutatief

In tegenstelling tot eindige rotaties, zijn infinitesimale rotaties *wel* commutatief (tot op eerste orde). Immers:

$$([1] + [\epsilon_1])([1] + [\epsilon_2]) = [1] + [\epsilon_1] + [\epsilon_2] + [\epsilon_1][\epsilon_2] \approx [1] + [\epsilon_1] + [\epsilon_2],$$

en de volgorde maakt geen verschil. Dit ligt aan de basis van de theorie van *Lie-groepen*: de infinitesimale elementen (*generatoren*) vormen een lineaire ruimte (de *Lie-algebra*), terwijl de eindige elementen een groep vormen die niet commutatief hoeft te zijn.

## Tijdsafgeleide van vectorcomponenten in het vaste en roterende assenstelsel (G4.9)

### Het probleem

Bij een bewegend star lichaam wijzigt de oriëntatie van het body-fixed stelsel  $O'x'y'z'$  continu t.o.v. het space-fixed stelsel  $O'xyz$  (beide met dezelfde oorsprong  $O'$ , zodat enkel relatieve rotatie beschouwd wordt). Als een vectorgrootheid  $\mathbf{G}$  (kan bv. positievector of snelheidsvector zijn) ook verandert in de tijd, hoe verhouden dan de *tijdsafgeleide van de componenten van  $\mathbf{G}$  in het vaste stelsel* (gezien door een waarnemer in het ruimtevaste stelsel) zich tot de *tijdsafgeleide van de componenten van  $\mathbf{G}$  in het roterende stelsel* (gezien door een waarnemer meebewegend met het lichaam)?

Dit is niet triviaal: zelfs als de vector zelf niet zou veranderen, zouden zijn componenten in het roterende stelsel veranderen door de rotatie van het stelsel zelf.

### De ogenblikkelijke rotatievector $\boldsymbol{\omega}$

In een infinitesimaal tijdsinterval  $dt$  roteert het body-fixed stelsel over een infinitesimale hoek  $d\Phi$  rond een ogenblikkelijke as  $\mathbf{n}$ . We definiëren de **ogenblikkelijke rotatievector**:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\Phi}{dt} \mathbf{n}.$$

De richting van  $\boldsymbol{\omega}$  geeft de ogenblikkelijke rotatie-as, de grootte  $\omega = |\boldsymbol{\omega}|$  de ogenblikkelijke hoeksnelheid.

### Het fundamentele verband tussen tijdsafgeleiden

Beschouw een vectorgrootheid  $\mathbf{G}(t)$ . In het space-fixed en body-fixed stelsel kan deze geschreven worden als:

$$\mathbf{G}(t) = \sum_{i=1}^3 G_i(t) \mathbf{n}_i = \sum_{i=1}^3 G'_i(t) \mathbf{n}'_i(t),$$

waarbij  $\mathbf{n}_i$  de vaste basisvectoren zijn en  $\mathbf{n}'_i(t)$  de meedraaiende basisvectoren.

Aangezien de basisvectoren van het vaste stelsel constant zijn in de tijd:

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} = \sum_{i=1}^3 \frac{dG_i}{dt} \mathbf{n}_i.$$

Voor het body-fixed stelsel moet echter ook rekening gehouden worden met de tijdsafhankelijkheid van de basisvectoren:

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} = \sum_{i=1}^3 \frac{dG'_i}{dt} \mathbf{n}'_i + \sum_{i=1}^3 G'_i \frac{d\mathbf{n}'_i}{dt}.$$

Tijdens een infinitesimaal tijdsinterval  $dt$  roteert het body-fixed stelsel over een hoek  $d\Phi$  rond een ogenblikkelijke as  $\mathbf{n}$ . De basisvectoren  $\mathbf{n}'_i$  ondergaan dus dezelfde infinitesimale rotatie. Gebruik makend van de infinitesimale rotatieformule

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) d\Phi,$$

en rekening houdend met het feit dat hier een *passieve* rotatie van het assenstelsel wordt beschreven, moet het teken van  $d\Phi$  worden omgekeerd. De formule hierboven beschrijft namelijk een *actieve* rotatie van een vector (de vector zelf wordt gedraaid in vaste assen), terwijl hier net het coördinatenstelsel wordt geroteerd en de vector fysisch onveranderd blijft. Een rotatie van het assenstelsel over  $+d\Phi$  heeft daarom exact hetzelfde effect op de componenten als een actieve rotatie van de vector over  $-d\Phi$ , omdat beide enkel de relatieve oriëntatie tussen vector en assen wijzigen maar in tegengestelde zin. Bijgevolg volgt:

$$\mathbf{n}'_i(t + dt) = \mathbf{n}'_i(t) + (-d\Phi) (\mathbf{n}'_i(t) \times \mathbf{n}(t)).$$

Dus:

$$\mathbf{n}'_i(t + dt) - \mathbf{n}'_i(t) = d\Phi (\mathbf{n}(t) \times \mathbf{n}'_i(t)).$$

Delen door  $dt$  geeft:

$$\frac{d\mathbf{n}'_i}{dt} = \frac{d\Phi}{dt} (\mathbf{n} \times \mathbf{n}'_i).$$

Met de definitie van de ogenblikkelijke rotatievector:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\Phi}{dt} \mathbf{n},$$

wordt dit:

$$\frac{d\mathbf{n}'_i}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}'_i.$$

Invullen in de afgeleide van  $\mathbf{G}$  levert:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{G}}{dt} &= \sum_{i=1}^3 \frac{dG'_i}{dt} \mathbf{n}'_i + \sum_{i=1}^3 G'_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}'_i) \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{dG'_i}{dt} \mathbf{n}'_i + \boldsymbol{\omega} \times \sum_{i=1}^3 G'_i \mathbf{n}'_i \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{dG'_i}{dt} \mathbf{n}'_i + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{G}. \end{aligned}$$

Hierbij is:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{dG'_i}{dt} \mathbf{n}'_i = \left( \frac{d\mathbf{G}}{dt} \right)_b,$$

dus volgt:

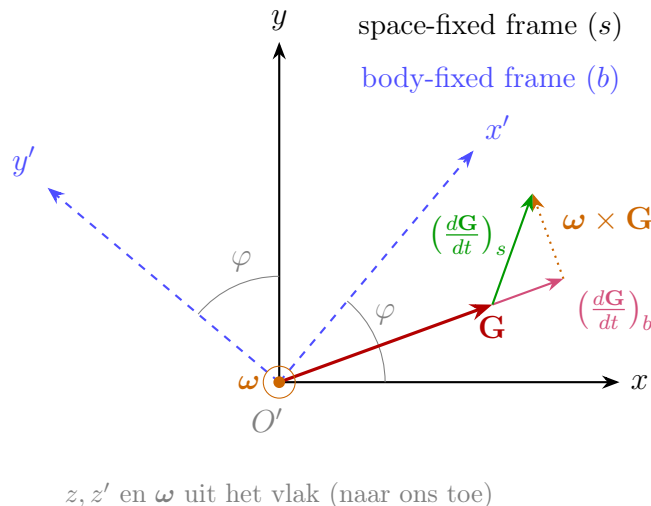
#### Stelling – Fundamentele rotatierelatie

$$\left( \frac{d\mathbf{G}}{dt} \right)_s = \left( \frac{d\mathbf{G}}{dt} \right)_b + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{G}. \quad (12)$$

met  $s$  en  $b$  respectievelijk voor space-fixed en body-fixed assenkruis.

**Interpretatie:** De verandering van  $\mathbf{G}$  gezien door een vaste waarnemer ( $s$ ) bestaat uit twee bijdragen:

- $\left(\frac{d\mathbf{G}}{dt}\right)_b$ : de intrinsieke verandering van  $\mathbf{G}$ , gezien door een meeroderende waarnemer.
- $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{G}$ : de schijnbare verandering door de rotatie van het assenstelsel zelf.



Figuur 2: Tijdsafgeleide van  $\mathbf{G}$  in het vaste en roterende assenstelsel ("bovenaanzicht").

**Interpretatie van de figuur.** De figuur toont de relatie tussen de tijdsafgeleide van een vector in een vast (space-fixed) assenstelsel en in een meedraaiend (body-fixed) assenstelsel. De zwarte assen stellen het space-fixed frame ( $s$ ) voor, terwijl de blauwe assen het body-fixed frame ( $b$ ) voorstellen dat roteert met hoeksnelheid  $\boldsymbol{\omega}$ .

De vector  $\mathbf{G}$  kan zowel beschreven worden in het vaste als in het meedraaiende stelsel. Hoewel  $\mathbf{G}$  zelf dezelfde geometrische grootte blijft, verschillen de gemeten tijdsafgeleiden omdat het referentiestelsel zelf roteert.

Indien  $\mathbf{G}$  in het body-fixed frame verandert volgens  $\left(\frac{d\mathbf{G}}{dt}\right)_b$ , dan wordt deze verandering in het space-fixed frame bijkomend beïnvloed door de rotatie van het assenstelsel zelf. Deze extra bijdrage wordt gegeven door de term  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{G}$ , die loodrecht staat op  $\mathbf{G}$  omdat  $\boldsymbol{\omega}$  langs de rotatie-as wijst.

De totale tijdsafgeleide in het vaste stelsel is dan de vectorsom van beide bijdragen, zoals zichtbaar in de figuur en samengevat in de fundamentele rotatierelatie:

$$\left(\frac{d\mathbf{G}}{dt}\right)_s = \left(\frac{d\mathbf{G}}{dt}\right)_b + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{G}.$$

## De componenten van $\boldsymbol{\omega}$ in termen van de Euler-hoeken

De ogenblikkelijke rotatievector  $\boldsymbol{\omega}$  kan worden samengesteld uit de drie deelrotaties die de Euler-hoeken definiëren:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_\varphi + \boldsymbol{\omega}_\theta + \boldsymbol{\omega}_\psi,$$

waarbij:

- $\boldsymbol{\omega}_\varphi = \dot{\varphi} \mathbf{n}_z$ : rotatie over de derde as van het ruimtevaste stelsel.
- $\boldsymbol{\omega}_\theta = \dot{\theta} \mathbf{n}_\xi$ : rotatie over de tussenliggende  $\xi$ -as (na de eerste Euler-rotatie).
- $\boldsymbol{\omega}_\psi = \dot{\psi} \mathbf{n}_{z'}$ : rotatie over de derde as van het lichaamsvaste stelsel.

**Componenten in het lichaamsvaste stelsel ( $x', y', z'$ )-assen.** Om de componenten van  $\boldsymbol{\omega}$  langs de assen van het body-fixed stelsel te vinden, projecteren we elke deelrotatievector op die assen via het inproduct. Voor een willekeurige as  $\mathbf{n}_{i'}$  geldt:

$$\omega_{i'} = \mathbf{n}_{i'} \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{n}_{i'} \cdot \boldsymbol{\omega}_\varphi + \mathbf{n}_{i'} \cdot \boldsymbol{\omega}_\theta + \mathbf{n}_{i'} \cdot \boldsymbol{\omega}_\psi.$$

De richtingsvectoren  $\mathbf{n}_z$  en  $\mathbf{n}_\xi$  worden uitgedrukt in het lichaamsvaste stelsel via de Eulermatrix  $[O(\varphi, \theta, \psi)]$ . De inproducten per deelrotatie zijn dan:

*Eerste Euler-rotatie* ( $\boldsymbol{\omega}_\varphi = \dot{\varphi} \mathbf{n}_z$ ) (derde kolom van  $[O(\varphi, \theta, \psi)]$  want  $\mathbf{n}_z = (0, 0, 1)^T$ ):

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{x'} \cdot \boldsymbol{\omega}_\varphi &= \dot{\varphi} \mathbf{n}_{x'} \cdot \mathbf{n}_z = \dot{\varphi} \sin \psi \sin \theta, \\ \mathbf{n}_{y'} \cdot \boldsymbol{\omega}_\varphi &= \dot{\varphi} \mathbf{n}_{y'} \cdot \mathbf{n}_z = \dot{\varphi} \cos \psi \sin \theta, \\ \mathbf{n}_{z'} \cdot \boldsymbol{\omega}_\varphi &= \dot{\varphi} \mathbf{n}_{z'} \cdot \mathbf{n}_z = \dot{\varphi} \cos \theta. \end{aligned}$$

*Tweede Euler-rotatie* ( $\boldsymbol{\omega}_\theta = \dot{\theta} \mathbf{n}_\xi$ ) (eerste kolom van  $[O_{\zeta'}(\psi)]$  want  $\mathbf{n}_\xi = (1, 0, 0)^T$  in het tussenstelsel, en  $[O_\xi(\theta)]$  laat die ongewijzigd):

$$[O_{\zeta'}(\psi)][O_\xi(\theta)] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi \\ -\sin \psi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dus

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{x'} \cdot \boldsymbol{\omega}_\theta &= \dot{\theta} \mathbf{n}_{x'} \cdot \mathbf{n}_\xi = \dot{\theta} \cos \psi, \\ \mathbf{n}_{y'} \cdot \boldsymbol{\omega}_\theta &= \dot{\theta} \mathbf{n}_{y'} \cdot \mathbf{n}_\xi = -\dot{\theta} \sin \psi, \\ \mathbf{n}_{z'} \cdot \boldsymbol{\omega}_\theta &= \dot{\theta} \mathbf{n}_{z'} \cdot \mathbf{n}_\xi = 0. \end{aligned}$$

*Derde Euler-rotatie* ( $\boldsymbol{\omega}_\psi = \dot{\psi} \mathbf{n}_{z'}$ ) ( $\mathbf{n}_{z'}$  is al een as van het lichaamsvaste stelsel, dus de inproducten volgen rechtstreeks uit orthonormaliteit):

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{x'} \cdot \boldsymbol{\omega}_\psi &= \dot{\psi} \mathbf{n}_{x'} \cdot \mathbf{n}_{z'} = 0, \\ \mathbf{n}_{y'} \cdot \boldsymbol{\omega}_\psi &= \dot{\psi} \mathbf{n}_{y'} \cdot \mathbf{n}_{z'} = 0, \\ \mathbf{n}_{z'} \cdot \boldsymbol{\omega}_\psi &= \dot{\psi} \mathbf{n}_{z'} \cdot \mathbf{n}_{z'} = \dot{\psi}. \end{aligned}$$

Samengevat, door de drie bijdragen per as op te tellen:

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_{x'} &= \dot{\varphi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \psi, \\ \omega_{y'} &= \dot{\varphi} \cos \psi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \psi, \\ \omega_{z'} &= \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}. \end{aligned}} \quad (13)$$

**Componenten in het space-fixed stelsel** ( $x, y, z$ )-assen. Nu projecteren we elke deelrotatievector op de assen van het ruimtevaste stelsel. Voor een willekeurige as  $\mathbf{n}_i$  geldt:

$$\omega_i = \mathbf{n}_i \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{n}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_\varphi + \mathbf{n}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_\theta + \mathbf{n}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_\psi.$$

De richtingsvectoren  $\mathbf{n}_\xi$  en  $\mathbf{n}_{z'}$  worden nu uitgedrukt in het space-fixed stelsel via de inverse Euler-matrix  $[O(\varphi, \theta, \psi)]^T$ .

*Eerste Euler-rotatie* ( $\boldsymbol{\omega}_\varphi = \dot{\varphi} \mathbf{n}_z$ ) ( $\mathbf{n}_z$  is al een as van het ruimtevaste stelsel, dus de inproducten volgen rechtstreeks uit orthonormaliteit):

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_x \cdot \boldsymbol{\omega}_\varphi &= \dot{\varphi} \mathbf{n}_x \cdot \mathbf{n}_z = 0, \\ \mathbf{n}_y \cdot \boldsymbol{\omega}_\varphi &= \dot{\varphi} \mathbf{n}_y \cdot \mathbf{n}_z = 0, \\ \mathbf{n}_z \cdot \boldsymbol{\omega}_\varphi &= \dot{\varphi} \mathbf{n}_z \cdot \mathbf{n}_z = \dot{\varphi}.\end{aligned}$$

*Tweede Euler-rotatie* ( $\boldsymbol{\omega}_\theta = \dot{\theta} \mathbf{n}_\xi$ ) (eerste kolom van  $[O_z(\varphi)]^T$  want  $\mathbf{n}_\xi = (1, 0, 0)^T$  in het tussenstelsel na de eerste rotatie, en enkel  $[O_z(\varphi)]^T$  moet nog ongedaan gemaakt worden):

$$[O_z(\varphi)]^T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dus:

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_x \cdot \boldsymbol{\omega}_\theta &= \dot{\theta} \mathbf{n}_x \cdot \mathbf{n}_\xi = \dot{\theta} \cos \varphi, \\ \mathbf{n}_y \cdot \boldsymbol{\omega}_\theta &= \dot{\theta} \mathbf{n}_y \cdot \mathbf{n}_\xi = -\dot{\theta} \sin \varphi, \\ \mathbf{n}_z \cdot \boldsymbol{\omega}_\theta &= \dot{\theta} \mathbf{n}_z \cdot \mathbf{n}_\xi = 0.\end{aligned}$$

*Derde Euler-rotatie* ( $\boldsymbol{\omega}_\psi = \dot{\psi} \mathbf{n}_{z'}$ ) (derde kolom van  $[O(\varphi, \theta, \psi)]^T$  want  $\mathbf{n}_{z'} = (0, 0, 1)^T$  in het lichaamsvaste stelsel):

$$[O(\varphi, \theta, \psi)]^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

Dus:

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_x \cdot \boldsymbol{\omega}_\psi &= \dot{\psi} \mathbf{n}_x \cdot \mathbf{n}_{z'} = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi, \\ \mathbf{n}_y \cdot \boldsymbol{\omega}_\psi &= \dot{\psi} \mathbf{n}_y \cdot \mathbf{n}_{z'} = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi, \\ \mathbf{n}_z \cdot \boldsymbol{\omega}_\psi &= \dot{\psi} \mathbf{n}_z \cdot \mathbf{n}_{z'} = \dot{\psi} \cos \theta.\end{aligned}$$

Samengevat, door de drie bijdragen per as op te tellen:

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi, \\ \omega_y &= -\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi, \\ \omega_z &= \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta\end{aligned}$$

Deze uitdrukkingen zullen centraal staan bij de beschrijving van de dynamica van starre lichamen in het volgende hoofdstuk.

## Het Coriolis-effect (G4.10)

### Situatieschets: een roterend referentiestelsel

Als eerste toepassing van de fundamentele rotatierelatie beschouwen we een concreet geval: de aarde roteert met (nagenoeg) constante hoeksnelheid  $\boldsymbol{\omega}$  rond haar as. We vergelijken twee waarnemers:

- een *inertiaalwaarnemer* in het ruimtevaste stelsel (“space-fixed”), die de wetten van Newton rechtstreeks kan toepassen;
- een *aardse waarnemer* in het meeroterend stelsel (“body-fixed”), die meebeweegt met de aarde.

Het doel is te begrijpen welke *schijnkrachten* de aardse waarnemer ervaart als hij de beweging van een deeltje beschrijft.

### Verband tussen snelheden in de twee stelsels

Pas de fundamentele rotatierelatie (12) toe op de positievector  $\mathbf{r}$  van het deeltje, we werken hier ook met een meeroterend assenstelsel dus ipv.  $b$  gebruiken we de letter  $r$ :

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_s = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad \longrightarrow \quad \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_s = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

Met  $\mathbf{v}_s$  de snelheid in het ruimtevaste stelsel en  $\mathbf{v}_r$  de snelheid gemeten door de meeroterende aardse waarnemer:

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}.$$

### Verband tussen versnellingen

Pas de fundamentele rotatierelatie nogmaals toe, nu op de vector  $\mathbf{v}_s$ :

$$\left(\frac{d\mathbf{v}_s}{dt}\right)_s = \left(\frac{d\mathbf{v}_s}{dt}\right)_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_s.$$

Het linkerlid is de versnelling  $\mathbf{a}_s$  gemeten in het inertiaalstelsel. We substitueren  $\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$  in het rechterlid (met  $\boldsymbol{\omega}$  constant):

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_s &= \left(\frac{d(\mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})}{dt}\right)_r + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \\ &= \mathbf{a}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \\ &= \mathbf{a}_r + 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}), \end{aligned}$$

waarbij  $\mathbf{a}_r = \left(\frac{d\mathbf{v}_r}{dt}\right)_r$  de versnelling gemeten door de meeroterende waarnemer is.

### De effectieve kracht voor de meeroterende waarnemer

In het inertiaalstelsel geldt de tweede wet van Newton:  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}_s$ . Herschreven in termen van de versnelling  $\mathbf{a}_r$  van de meeroterende waarnemer:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_r + 2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r) + m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}).$$

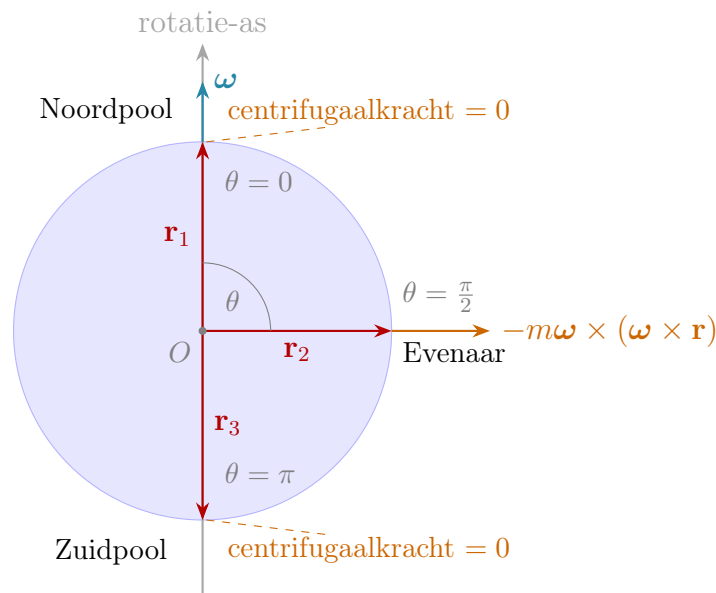
Voor de meeroterende waarnemer lijkt het of het deeltje beweegt onder invloed van een *effectieve kracht*:

$$\mathbf{F}_{\text{eff}} = \mathbf{F} - 2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r) - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}).$$

De twee extra termen zijn schijnkrachten (pseudo-krachten) die enkel optreden omdat het referentiestelsel roteert.

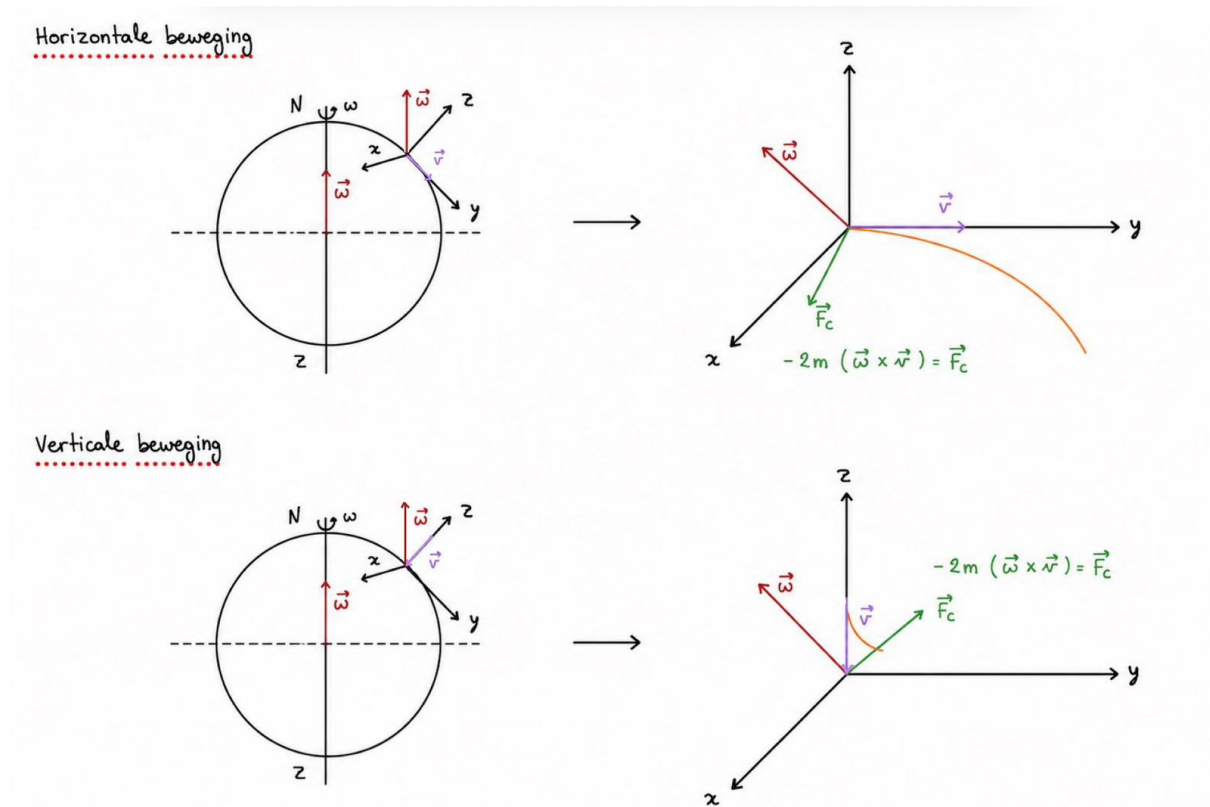
### De twee schijnkrachten: centrifugaal en Coriolis

**De centrifugaalkracht:**  $-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ . Dit is de bekende centrifugaalkracht. Ze staat loodrecht op de rotatie-as en is naar buiten gericht (weg van de as). De grootte is  $m\omega^2 r \sin \theta$  met  $\theta$  de hoek tussen  $\mathbf{r}$  en de rotatie-as. Ze is maximaal aan de evenaar en nul aan de polen. Dit is de reden waarom raketlanceerinstallaties bij voorkeur aan de evenaar worden gebouwd: de centrifugaalkracht werkt mee bij de lancering.



Figuur 3: De centrifugaalkracht op drie plaatsen: nul aan de polen ( $\theta = 0$  en  $\theta = \pi$ ), maximaal aan de evenaar ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ).

**De Corioliskracht:**  $-2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r)$ . De Corioliskracht treedt *enkel* op voor deeltjes die *bewegen* t.o.v. het meeroterende stelsel (als  $\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$  verdwijnt ze). De kracht staat loodrecht op zowel de rotatie-as als op de snelheid  $\mathbf{v}_r$ .



Figuur 4: Coriolis-effect op het noordelijk halfrond

**Praktische gevolgen.**

- **Horizontale beweging** (deel 1 van de figuur): Wanneer een deeltje horizontaal beweegt op het **noordelijk halfrond**, zorgt de Corioliskracht ervoor dat het deeltje wordt afgebogen naar *rechts* ten opzichte van zijn bewegingsrichting. Op het **zuidelijk halfrond** gebeurt net het omgekeerde: daar wordt het deeltje afgebogen naar *links*.
- **Verticale beweging**: Ook bij verticale beweging speelt de Corioliskracht een rol. De richting van de afbuiging hangt af van de richting waarin het deeltje beweegt. Een belangrijk voorbeeld hiervan is de **vrije val** (deel 2 van de figuur). Wanneer een deeltje op het **noordelijk halfrond** naar beneden valt, wordt het door de Corioliskracht licht afgebogen naar het *oosten*. Op het **zuidelijk halfrond** gebeurt het omgekeerde en is de afbuiging naar het *westen*.

De Corioliskracht is meestal veel kleiner dan de zwaartekracht, maar speelt een belangrijke rol bij grootschalige bewegingen zoals luchtstromingen, oceaanstromingen en weerssystemen.

Op het noordelijk halfrond stroomt lucht naar een lagedrukgebied toe. Door de Corioliskracht wordt deze lucht naar rechts afgebogen, waardoor de stroming niet recht naar het centrum gaat maar eromheen draait. Dit resulteert in een circulatie in tegenwijzerszin rond de kern van lage druk.

## Hoofdstuk 5: Beweging van starre lichamen — dynamica

### Inleiding

In hoofdstuk 4 beschreven we de *kinematica* van starre lichamen: hoe men de oriëntatie beschrijft via orthogonale transformaties en Euler-hoeken, en hoe tijdsafgeleiden in het vaste en het roterende stelsel zich tot elkaar verhouden. In dit hoofdstuk behandelen we de *dynamica*: welke krachten en koppels bepalen hoe een star lichaam werkelijk beweegt?

De centrale concepten zijn de *traagheidstensor* (de rotatoire tegenhanger van de massa) en de *Euler-bewegingsvergelijkingen* (de rotatoire tegenhanger van de tweede wet van Newton). We sluiten af met een bespreking van de symmetrische tol en de gyroscoop als belangrijke praktische toepassingen.

## Draaimoment en kinetische energie bij rotatie om een punt (G5.1)

### Splitsing van translatie en rotatie

De beweging van een star lichaam kan meestal worden opgesplitst in twee delen:

- een *translationele beweging*: het hele lichaam verplaatst zich, waarbij het massamiddelpunt beweegt;
- een *rotationele beweging*: het lichaam draait rond een punt of as, waardoor de oriëntatie verandert.

Uit hoofdstuk 1 weten we dat zowel het impulsmoment als de kinetische energie kunnen worden geschreven als een som van een translationeel en een rotationeel deel, op voorwaarde dat we het massamiddelpunt als oorsprong kiezen (zie vergelijkingen (48) en (52) in de slides):

$$\mathbf{L} = \mathbf{R} \times \mathbf{P} + \mathbf{L}_{\text{rel}}, \quad T = \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2 + T_{\text{rel}}.$$

Hierbij beschrijft  $\mathbf{R} \times \mathbf{P}$  het impulsmoment dat ontstaat door de beweging van het massamiddelpunt, terwijl  $\mathbf{L}_{\text{rel}}$  het impulsmoment door de rotatie rond het massamiddelpunt voorstelt.

Op dezelfde manier stelt  $\frac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2$  de kinetische energie van de translatie voor, en  $T_{\text{rel}}$  de kinetische energie van de rotatie.

Wanneer ook de potentiële energie op deze manier kan worden opgesplitst, mogen we de translationele en rotationele beweging afzonderlijk bestuderen. Dat vereenvoudigt de analyse van de beweging aanzienlijk.

Vanaf nu beschouwen we een star lichaam waarvan één punt  $O$  vast in de ruimte blijft (of algemener: we kiezen het massamiddelpunt als oorsprong). In dat geval is er geen translationele beweging meer en blijft enkel de rotatie van het lichaam over.

## Het draaimoment in termen van de rotatievector

Het draaimoment van het starre lichaam rond het vaste punt  $O$  is (gemeten in het space-fixed frame):

$$\mathbf{L} = \sum_n m_n \mathbf{r}_n \times \mathbf{v}_n,$$

waarbij de som loopt over alle massapunten  $n$  van het lichaam, met massa  $m_n$  en positievector  $\mathbf{r}_n$  t.o.v.  $O$ .

Omdat het lichaam star is en om  $O$  roteert, geldt (uit de fundamentele rotatierelatie van hoofdstuk 4, vergelijking (12)):  $\left(\frac{d\mathbf{G}}{dt}\right)_s = \left(\frac{d\mathbf{G}}{dt}\right)_b + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{G}$  dat de snelheid van elk punt volledig bepaald wordt door de ogenblikkelijke rotatievector  $\boldsymbol{\omega}$ . Pas dit toe op  $\mathbf{G} = \mathbf{r}_n$ : omdat het lichaam star is zijn de coördinaten van elk punt constant in het body-fixed stelsel, dus  $\left(\frac{d\mathbf{r}_n}{dt}\right)_b = \mathbf{0}$ , en blijft enkel de sleepterm over:

$$\mathbf{v}_n = \left(\frac{d\mathbf{r}_n}{dt}\right)_s = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n.$$

Substitutie geeft:

$$\mathbf{L} = \sum_n m_n \mathbf{r}_n \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n).$$

We werken het dubbele vectorproduct uit via de identiteit  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ :

$$\mathbf{r}_n \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n) = \boldsymbol{\omega} r_n^2 - \mathbf{r}_n(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_n).$$

Dus:

$$\mathbf{L} = \sum_n m_n (\boldsymbol{\omega} r_n^2 - \mathbf{r}_n(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_n)).$$

## De traagheidstensor: definitie via componenten

De  $i$ -de component van  $\mathbf{L}$  wordt, na uitschrijven met Cartesische indices en met  $\omega_i = \sum_j \delta_{ij} \omega_j$ :

$$L_i = \sum_n m_n \left( r_n^2 \omega_i - x_{ni} \sum_j \omega_j x_{nj} \right) = \sum_j \sum_n m_n (\delta_{ij} r_n^2 - x_{ni} x_{nj}) \omega_j = \sum_j I_{ij} \omega_j,$$

waarbij we de **traagheidstensor**  $I_{ij}$  hebben ingevoerd:

$$I_{ij} = \sum_n m_n (\delta_{ij} r_n^2 - x_{ni} x_{nj}).$$

Hierin is  $\delta_{ij}$  het Kronecker-delta,  $r_n^2 = x_{n1}^2 + x_{n2}^2 + x_{n3}^2$  het kwadraatafstand van massapunt  $n$  tot de oorsprong, en  $x_{ni}$  de  $i$ -de Cartesische coördinaat van massapunt  $n$ .

**Compacte notatie:** het verband  $L_i = \sum_j I_{ij} \omega_j$  schrijven we als:

$$\mathbf{L} = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega},$$

waarbij  $\mathbf{I}$  de traagheidstensor is (een  $3 \times 3$ -matrix) en de punt het matrixproduct aanduidt.

**Diagonale elementen: traagheidsmomenten.** De diagonale elementen heten *traagheidsmomenten*. Bijvoorbeeld het traagheidsmoment rond de  $x$ -as:

$$I_{xx} = \sum_n m_n (r_n^2 - x_n^2) = \sum_n m_n (y_n^2 + z_n^2) \geq 0.$$

Met  $r_n^2 = x_{n1}^2 + x_{n2}^2 + x_{n3}^2$  en hierin is de notatie  $x_{ni}$  de  $i$ -de Cartesische coördinaat van deeltje  $n$ , zodat  $x_{n1} = x_n$ ,  $x_{n2} = y_n$ ,  $x_{n3} = z_n$ .

**Buiten-diagonale elementen: traagheidsproducten.** De buiten-diagonale elementen heten *traagheidsproducten*. Bijvoorbeeld:

$$I_{xy} = - \sum_n m_n x_n y_n.$$

Ze meten een mate van “onevenwichtigheid” van de massaverdeling ten opzichte van de assen.

**Symmetrie van de traagheidstensor.** Uit de definitie volgt onmiddellijk dat  $I_{ij} = I_{ji}$ : de traagheidstensor is een *symmetrische* matrix.

**Continue massaverdeling.** Voor een lichaam met massadichtheid  $\rho(\mathbf{r})$  vervangt men de som door een integraal over het volume  $V$ :

$$I_{ij} = \int_V \rho(\mathbf{r}) (r^2 \delta_{ij} - x_i x_j) dx_1 dx_2 dx_3.$$

**Body-fixed frame: constante traagheidscoëfficiënten.** Het verband  $\mathbf{L} = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}$  is een vectoridentiteit: geldig in om het even welk assenstelsel. Als we het *lichaamsvaste assenstelsel* kiezen, dan zijn de coördinaten  $x_{ni}$  van de massapunten *constant* in de tijd (het lichaam is star!), en bijgevolg zijn de traagheidselementen  $I_{ij}$  tijdsafhankelijke constanten, eigen aan het lichaam en de keuze van het assenstelsel.

## De traagheidstensor en het traagheidsmoment (G5.3)

### De kinetische energie van een roterend star lichaam

De kinetische energie van het lichaam is:

$$T = \sum_n \frac{1}{2} m_n v_n^2 = \sum_n \frac{1}{2} m_n \mathbf{v}_n \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n).$$

met  $\mathbf{v}_n = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n$ .

Via de cyclische eigenschap van het gemengde product ( $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a})$ ):

$$T = \sum_n \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r}_n \times m_n \mathbf{v}_n) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{ij} I_{ij} \omega_i \omega_j.$$

De kinetische energie is dus een kwadratische vorm in de rotatievector  $\boldsymbol{\omega}$ , met de traagheidstensor als “gewichtsmatrix”.

## Het traagheidsmoment rond een willekeurige as

Als het lichaam op een bepaald ogenblik roteert rond een as met richtingsvector  $\mathbf{n}$  (een eenheidsvector), dan is  $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{n}$ . De kinetische energie wordt dan:

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{n}) = \frac{1}{2} \omega^2 I,$$

waarbij het **traagheidsmoment rond de rotatie-as  $\mathbf{n}$**  is gedefinieerd als:

$$\begin{aligned} I = \mathbf{n} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{n} &= \sum_{ij} n_i I_{ij} n_j = \sum_n m_n \sum_{ij} n_i n_j (r_n^2 \delta_{ij} - x_{ni} x_{nj}) \\ &= \sum_n m_n \left( r_n^2 \sum_{ij} n_i n_j \delta_{ij} - \sum_{ij} n_i x_{ni} x_{nj} n_j \right) \\ &= \sum_n m_n \left( r_n^2 \sum_i n_i^2 - \left( \sum_i n_i x_{ni} \right)^2 \right) \\ &= \sum_n m_n (r_n^2 - (\mathbf{r}_n \cdot \mathbf{n})^2) \\ &= \sum_n m_n (r_n^2 - r_n^2 \cos^2 \alpha_n) \\ &= \sum_n m_n r_n^2 \sin^2 \alpha_n \\ &= \sum_n m_n |\mathbf{r}_n \times \mathbf{n}|^2, \end{aligned}$$

waarbij  $\alpha_n$  de hoek is tussen  $\mathbf{r}_n$  en  $\mathbf{n}$ , en  $|\mathbf{r}_n \times \mathbf{n}|$  de loodrechte afstand van massapunt  $n$  tot de rotatie-as.

## De traagheidstensor als tweede-orde tensor

In de volgende sectie (G5.4) zullen we aantonen dat de traagheidselementen  $I_{ij}$  van  $\mathbf{I}$  bij een verandering van assenstelsel transformeren als:

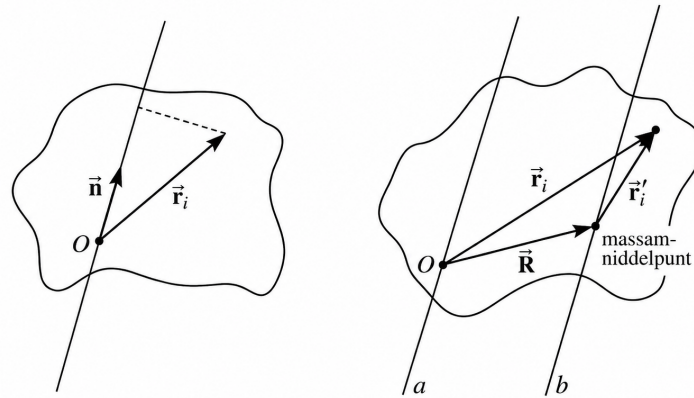
$$I'_{i'j'} = \sum_{ij} [O]_{i'i} [O]_{j'j} I_{ij},$$

of in matrixnotatie:  $[I'] = [O][I][O]^T$ . Dit is precies de transformatieregel van een *tweede-orde tensor* (een uitbreiding van het vectorbegrip naar grootheden met twee Cartesische indices). De traagheidstensor is dus inderdaad een tensor.

**Opmerking.** Een tensor is een fysisch/geometrisch object dat zich op een welbepaalde manier gedraagt onder een verandering van assenkruis. Een scalair is een 0de-orde tensor (1 getal), een vector is een 1ste-orde tensor (3 componenten), en een tweede-orde tensor wordt in een assenkruis voorgesteld door een  $3 \times 3$ -matrix met twee indices  $T_{ij}$ . De traagheidstensor is een tweede-orde tensor die de relatie  $\mathbf{L} = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}$  beschrijft.

## De stelling van de parallelle assen (stelling van Steiner)

Het traagheidsmoment rond een willekeurige as is eenvoudig gerelateerd aan het traagheidsmoment rond de *parallelle as door het massamiddelpunt* (zie figuur).



**Opzet.** Zij  $\mathbf{R}$  de positievector van het massamiddelpunt en  $\mathbf{r}'_n = \mathbf{r}_n - \mathbf{R}$  de positie van massapunt  $n$  *relatief* t.o.v. het massamiddelpunt. Per definitie geldt (zie ook G1.2):

$$\sum_n m_n \mathbf{r}'_n = \mathbf{0}.$$

Het traagheidsmoment rond een as  $a$  door de oorsprong  $O$  met richting  $\mathbf{n}$  is:

$$I_a = \sum_n m_n (\mathbf{r}_n \times \mathbf{n})^2.$$

We substitueren  $\mathbf{r}_n = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_n$ :

$$I_a = \sum_n m_n [(\mathbf{R} \times \mathbf{n})^2 + (\mathbf{r}'_n \times \mathbf{n})^2 + 2(\mathbf{R} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{r}'_n \times \mathbf{n})].$$

De gemengde term verdwijnt omdat  $\sum_n m_n \mathbf{r}'_n = \mathbf{0}$ . We vinden de **stelling van de parallelle assen** (stelling van Steiner):

$$I_a = M (\mathbf{R} \times \mathbf{n})^2 + I_b,$$

waarbij  $I_b = \sum_n m_n (\mathbf{r}'_n \times \mathbf{n})^2$  het traagheidsmoment is rond de *parallelle as door het massamiddelpunt* (met  $|\mathbf{r}'_n \times \mathbf{n}|^2 = (r'_n)^2 - (\mathbf{r}'_n \cdot \mathbf{n})^2$  het kwadraat van de loodrechte afstand van massapunt  $n$  tot die as), en  $M(\mathbf{R} \times \mathbf{n})^2 = M d^2$  met  $d = |\mathbf{R} \times \mathbf{n}|$  de loodrechte afstand van het massamiddelpunt tot de as  $a$  door de oorsprong.

**Interpretatie.** Het traagheidsmoment rond een willekeurige as is gelijk aan het traagheidsmoment rond de parallelle as door het massamiddelpunt, *plus* het traagheidsmoment van de totale massa  $M$ , geconcentreerd in het massamiddelpunt, ten opzichte van de willekeurige as. Het traagheidsmoment rond de as door het massamiddelpunt is altijd het *kleinste* traagheidsmoment voor die richting.

## Hoofdassen van een star lichaam (G5.4)

### Transformatiegedrag van de traagheidstensor

We gaan na hoe  $I_{ij}$  verandert bij een rotatie van het assenstelsel  $Oxyz$  naar  $Ox'y'z'$ , beschreven door een  $SO(3)$ -matrix  $[O]$ . In het nieuwe stelsel zijn de eenheidsvectoren:

$$\mathbf{n}'_{i'} = \sum_i (\mathbf{n}'_{i'} \cdot \mathbf{n}_i) \mathbf{n}_i = \sum_i [O]_{i'i} \mathbf{n}_i.$$

Direct invullen in de definitie van de traagheidstensor in het nieuwe stelsel geeft:

$$\begin{aligned} I'_{i'j'} &= \sum_n m_n (\delta_{i'j'} r_n^2 - x_{ni'} x_{nj'}) \\ &= \sum_n m_n [(\mathbf{n}'_{i'} \cdot \mathbf{n}'_{j'}) (\mathbf{r}_n \cdot \mathbf{r}_n) - (\mathbf{n}'_{i'} \cdot \mathbf{r}_n) (\mathbf{n}'_{j'} \cdot \mathbf{r}_n)] \\ &= \sum_n m_n \left[ \left( \sum_i [O]_{i'i} \mathbf{n}_i \cdot \sum_j [O]_{j'j} \mathbf{n}_j \right) r_n^2 - \left( \sum_i [O]_{i'i} \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r}_n \right) \left( \sum_j [O]_{j'j} \mathbf{n}_j \cdot \mathbf{r}_n \right) \right] \\ &= \sum_{ij} [O]_{i'i} [O]_{j'j} \sum_n m_n [(\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j) r_n^2 - (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r}_n) (\mathbf{n}_j \cdot \mathbf{r}_n)] \\ &= \sum_{ij} [O]_{i'i} [O]_{j'j} \sum_n m_n (\delta_{ij} r_n^2 - x_{ni} x_{nj}) \\ &= \sum_{ij} [O]_{i'i} [O]_{j'j} I_{ij}, \end{aligned}$$

waarbij in de derde stap  $\mathbf{n}'_{i'} = \sum_i [O]_{i'i} \mathbf{n}_i$  gebruikt is, en in de vierde stap  $\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j = \delta_{ij}$  en  $\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r}_n = x_{ni}$ . Compacter in matrixnotatie:

$$[I'] = [O][I][O]^T.$$

Omdat de componenten van een vector transformeren als  $x'_{i'} = \sum_i [O]_{i'i} x_i$ , en de traagheidstensor analoog transformeert in *elk* van zijn twee indices, is  $\mathbf{I}$  inderdaad een *tweede-orde tensor*.

**Opmerking.** Vergis de notatie  $I_{ij}$  van de componenten van de traagheidstensor  $\mathbf{I}$  niet met een traagheidsmoment. Een traagheidsmoment  $I$  is een scalair, terwijl de traagheidstensor een tweede-orde tensor is die in een gekozen assenkruis voorgesteld wordt door een  $3 \times 3$ -matrix.

### Diagonalisatie: de hoofdassen

De traagheidstensor  $[I]$  is een *reëel symmetrische*  $3 \times 3$ -matrix. De spectrale stelling uit de lineaire algebra garandeert dat er altijd een orthonormale basis van eigenvectoren bestaat, en dat alle eigenwaarden reëel zijn. Er bestaat dus altijd een specifieke oriëntatie van het assenstelsel ( $Ox'y'z'$ ) waarvoor  $[I]$  diagonaal wordt:

$$[I'] = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}.$$

**Definitie – Hoofdtraagheidsassen en -momenten**

De eigenvectoren van de traagheidstensor heten de **hoofdtraagheidsassen** van het starre lichaam. De corresponderende eigenwaarden  $I_1, I_2, I_3$  heten de **hoofdtraagheidsmomenten**.

**Seculiere vergelijking.** De eigenwaarden  $\lambda$  zijn de oplossingen van:

$$\det \begin{pmatrix} I_{xx} - \lambda & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} - \lambda & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

De drie oplossingen  $I_1, I_2, I_3$  zijn de hoofdtraagheidsmomenten. De bijbehorende eigenvectoren  $\mathbf{n}'_k$  voldoen aan:

$$[I][\mathbf{n}'_k] = I_k[\mathbf{n}'_k], \quad \text{of componentgewijs: } \sum_j I_{ij}(n'_k)_j = I_k(n'_k)_i.$$

**Vereenvoudiging in het hoofdassenstelsel.** In het algemeen gelden:

$$L_i = \sum_j I_{ij} \omega_j, \quad T = \frac{1}{2} \sum_{ij} I_{ij} \omega_i \omega_j.$$

Als we de assen van het body-fixed stelsel langs de hoofdtraagheidsassen leggen, is  $I_{ij} = I_i \delta_{ij}$  (diagonaal), waardoor de kruistermen verdwijnen en de uitdrukkingen voor draaimoment en kinetische energie sterk vereenvoudigen:

$$\mathbf{L} = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega} \implies L_i = I_i \omega_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

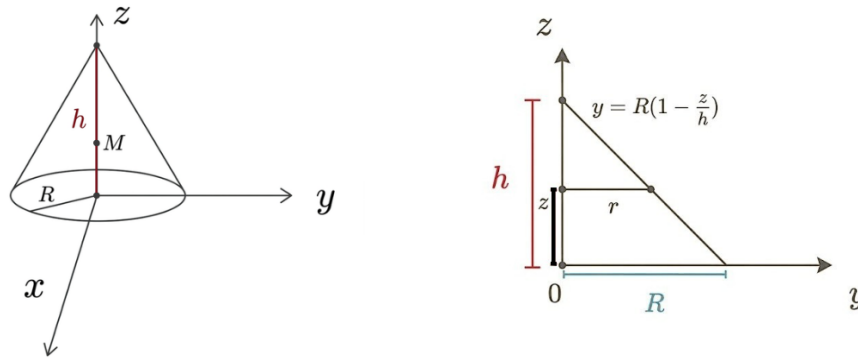
$$T = \frac{1}{2} \sum_i I_i \omega_i^2.$$

**Rol van symmetrie.** In veel praktische gevallen zijn de hoofdassen onmiddellijk zichtbaar via de symmetrie van het lichaam:

- Een symmetrie-as is altijd een hoofdas.
- Bij rotatiesymmetrie t.o.v. een as  $z'$  zijn de twee andere hoofdassen ontaard:  $I_1 = I_2 \neq I_3$ .

**Voorbeeld:**

een homogene kegel met straalgrondcirkel  $R$  en hoogte  $h$ , massadichtheid  $\rho_0$  en totale massa  $M = \frac{1}{3}\rho_0\pi R^2h$ . Het massamiddelpunt ligt op een kwart van de hoogte (op de symmetrieas). We kiezen de symmetrieas als  $z$ -as met de top in de oorsprong.



Figuur 5: Kegels, massamiddelpunt  $\mathbf{M} = (0, 0, \frac{1}{4}h)$

**Cilindrische coördinaten.** We gebruiken  $(r, \theta, z)$  met  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ . Voor een gegeven hoogte  $z$  loopt  $r$  van 0 tot  $R(1 - z/h)$  (lineaire begrenzing van de kegel, zie rechte figuur).

**Traagheidsproducten.** Door de rotatiesymmetrie rond de  $z$ -as verdwijnen alle traagheidsproducten. Bijvoorbeeld:

$$I_{xy} = -\rho_0 \iiint r^2 \sin \theta \cos \theta \, dx \, dy \, dz = -\rho_0 \int_0^h dz \int_0^{R(1-z/h)} r \, dr \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta \, d\theta = 0,$$

omdat  $\int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta \, d\theta = 0$ . Analoog verdwijnt  $I_{xz}$  omdat  $\int_0^{2\pi} \cos \theta \, d\theta = 0$ .

**Symmetrie:**  $I_{xx} = I_{yy}$ . Dit volgt uit rotatiesymmetrie, of expliciet:

$$I_{xx} = \rho_0 \int_0^h dz \int_0^{R(1-z/h)} r \, dr \int_0^{2\pi} (r^2 \sin^2 \theta + z^2) \, d\theta,$$

$$I_{yy} = \rho_0 \int_0^h dz \int_0^{R(1-z/h)} r \, dr \int_0^{2\pi} (r^2 \cos^2 \theta + z^2) \, d\theta,$$

en omdat  $\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta = \pi$ , volgt  $I_{xx} = I_{yy}$ .

**Conclusie.** Men hoeft dus enkel nog  $I_{zz}$  en  $I_{xx}$  expliciet te berekenen om de volledige traagheidstensor (in het hoofdassenstelsel) te kennen.

## De Euler-bewegingsvergelijkingen (G5.5)

### Van het inertiaalstelsel naar het lichaamsvaste stelsel

In het inertiaalstelsel (space-fixed frame) geldt de bekende bewegingswet voor het draaimoment:

$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_s = \mathbf{N},$$

met  $\mathbf{N}$  het externe krachtmoment rond  $O$ . Om te werken met de (tijdsafhankelijke) traagheidstensor, stappen we over naar het lichaamsvaste frame (body-fixed). Uit de fundamentele rotatierelatie (vergelijking (12) uit hoofdstuk 4):

$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_s = \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_b + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = \mathbf{N}.$$

### Keuze van het lichaamsvaste assenstelsel langs de hoofdassen

Vanaf nu werken we uitsluitend in het body-fixed frame (en laten we de index  $b$  weg) en leggen we de assen langs de *hoofdtraagheidsassen* van het lichaam. In dat stelsel:

- zijn de traagheidsmomenten  $I_i$  tijdsafhankelijk want de  $x_{ni}$ 's zijn constant in de tijd aangezien we in het body-fixed assenkruis werken,
- geldt  $L_i = I_i \omega_i$ .

De bewegingsvergelijking per component wordt:

$$\dot{L}_i + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L})_i = N_i.$$

Met  $\dot{L}_i = I_i \dot{\omega}_i$  (de  $I_i$  zijn constant) en het vectorproduct uitgewerkt:

$$(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L})_1 = \omega_2 L_3 - \omega_3 L_2 = \omega_2 (I_3 \omega_3) - \omega_3 (I_2 \omega_2) = \omega_2 \omega_3 (I_3 - I_2),$$

$$(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L})_2 = \omega_3 L_1 - \omega_1 L_3 = \omega_3 \omega_1 (I_1 - I_3),$$

$$(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L})_3 = \omega_1 L_2 - \omega_2 L_1 = \omega_1 \omega_2 (I_2 - I_1).$$

## De Euler-bewegingsvergelijkingen

Samengevat verkrijgen we de **Euler-bewegingsvergelijkingen voor een star lichaam**:

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 - \omega_2 \omega_3 (I_2 - I_3) &= N_1, \\ I_2 \dot{\omega}_2 - \omega_3 \omega_1 (I_3 - I_1) &= N_2, \\ I_3 \dot{\omega}_3 - \omega_1 \omega_2 (I_1 - I_2) &= N_3. \end{aligned}$$

### Opmerkingen.

- De componenten  $\omega_i$  en  $N_i$  zijn genomen in het *body-fixed* stelsel (langs de hoofdassen). Wil men  $\omega_i$  uitdrukken in Euler-hoeken, dan gebruikt men de “geprimed” componenten uit vergelijking (13) van het vorige hoofdstuk.
- De vergelijkingen zijn niet-lineair (door de termen  $\omega_j \omega_k$ ) en kunnen in het algemeen niet analytisch worden opgelost. Numerieke methoden zijn dan vereist.
- De niet-lineaire termen zijn het gevolg van de overgang naar het roterende stelsel; ze weerspiegelen de veranderende richting van de assen t.o.v. het inertiaalstelsel.

**Speciaal geval: krachtmomentvrij lichaam.** Als  $N_i = 0$  voor alle  $i$  (geen extern krachtmoment), vereenvoudigen de Euler-vergelijkingen tot:

$$I_1\dot{\omega}_1 = \omega_2\omega_3(I_2 - I_3), \quad I_2\dot{\omega}_2 = \omega_3\omega_1(I_3 - I_1), \quad I_3\dot{\omega}_3 = \omega_1\omega_2(I_1 - I_2).$$

De energie en het draaimoment zijn beide behouden. Voor een bol ( $I_1 = I_2 = I_3$ ) volgt dat alle  $\dot{\omega}_i = 0$ : een vrij roterende bol draait eenparig. Voor een symmetrische tol ( $I_1 = I_2 \neq I_3$ ) kan de beweging volledig analytisch worden opgelost.

## De massieve symmetrische tol (G5.7)

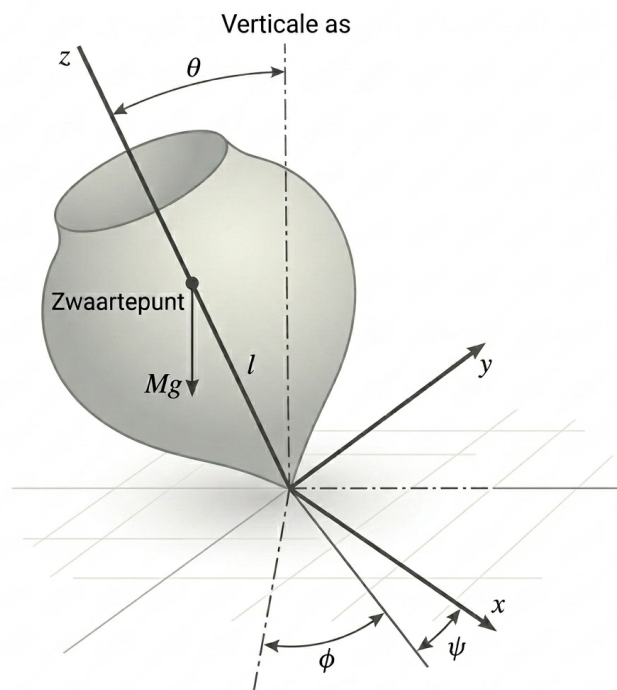
### Beschrijving van het systeem

De Euler-vergelijkingen zijn in het algemeen niet analytisch oplosbaar. Een uitzondering is de **symmetrische tol**: een star lichaam met een rotationele symmetrie-as (zodat  $I_1 = I_2 \neq I_3$ ), waarvan één punt op de symmetrieas *vast gehouden* wordt in de ruimte, en dat beweegt in een uniform gravitatieveld. De uitwerking is niet te kennen voor het examen, maar de fenomenologie is essentieel.

De karakteristieke bewegingen worden geïllustreerd in de figuur hieronder. Naast het *spinnen* van het lichaam rond zijn symmetrie-as treden twee soorten beweging op:

1. **Precessie:** de symmetrie-as van het spinnende lichaam roteert *om* de vaste verticale as. De top “wentelt” met zijn as rond de vertikaal.
2. **Nutatie:** de symmetrie-as maakt een op-en-neerbeweging t.o.v. de vaste verticale as. De hoek tussen de symmetrie-as en de vertikaal oscilleert.

Deze fenomenen zijn welgekend voor wie ooit met een tol heeft gespeeld: als een tol begint te vertragen, gaat hij eerst precresseren en dan wentelen voor hij valt.



Figuur 6: Eulerhoeken die de oriëntatie van een symmetrische tol bepalen.

## De gyroscoop

Een bijzonder en technologisch belangrijk speciaal geval van de symmetrische tol is de **gyroscoop**.

**Definitie en werking.** Een gyroscoop is een massieve symmetrische tol die *vrij opgehangen* is in zijn massamiddelpunt. Doordat het ophangingspunt samenvalt met het massamiddelpunt, oefent het zwaartekrachtveld *geen krachtmoment* uit op het toestel. Het draaimoment  $\mathbf{L}$  is dus behouden.

Als de gyroscoop met grote snelheid ronddraait, heeft het een groot draaimoment  $\mathbf{L}$  langs zijn symmetrie-as. Draaimomentsebehoud ( $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{0}$ ) impliceert dan dat  $\mathbf{L}$  *constant blijft in richting en grootte*, ook als de ophangconstructie van de gyroscoop roteert of kantelt.

**Intuïtie.** De symmetrie-as van de gyroscoop “herinnert” zich zijn oorspronkelijke richting t.o.v. de vaste sterren (het space-fixed inertiaalstelsel), ongeacht hoe zijn drager beweegt. Dit is het *gyroscopische effect*.

**Technologische toepassingen.** Het gyroscopische effect heeft talrijke toepassingen:

- **Gyrostabilisatie:** in schepen, vliegtuigen en satellieten gebruikt men gyroscopen om een vaste oriëntatie te handhaven of trillingen te dempen.
- **Gyrokompas:** een gyroscoop waarvan de as zich oriënteert langs de aardas (door de aarddraaiing). Dit geeft een kompas dat niet, zoals een magnetisch kompas, door metaal of magnetische storingen wordt beïnvloed.

**Opmerking.** Bij een praktisch gyrokompas moet wel worden gecompenseerd voor het feit dat de aarde roteert t.o.v. het inertiaalstelsel (de vaste sterren). Dit is een voorspelbaar en berekend effect.

## Hoofdstuk 6: Normaaltrillingen

### Inleiding

In dit hoofdstuk bestuderen we de beweging van een mechanisch systeem vlak bij een stabiel evenwicht. De vraag is: als we een systeem een kleine duw geven vanuit zijn evenwichtspositie, hoe oscilleert het dan?

Dit is een uiterst relevant probleem. Vrijwel elk stabiel mechanisch systeem, van atoombindingen in moleculen tot bruggen en gebouwen, van kristalroosters tot muziekinstrumenten, kan beschreven worden als een systeem dat trilt rond een evenwicht. De aanpak via *normaaltrillingen* (ook *normale modi* genoemd) geeft de meest inzichtelijke beschrijving van zulke trillingen.

De centrale strategie van dit hoofdstuk is:

1. Benadering voor kleine uitwijkingen: de Lagrangiaan wordt vereenvoudigd door te lineariseren.
2. Oplossingsansatz: we proberen een oplossing van de vorm  $e^{-i\omega t}$ , wat leidt tot een eigenwaardeprobleem.
3. Normaaltrillingen zijn de speciale trillingspatronen waarbij alle delen van het systeem met dezelfde frequentie oscilleren.
4. De algemene oplossing is een superpositie van alle normaaltrillingen.

## Formulering van het probleem: kleine trillingen rond evenwicht (G6.1)

### Het systeem en de Lagrangiaan

Beschouw een mechanisch systeem met conservatieve krachten en holonoom-tijdsonafhankelijke bindingen, beschreven door  $n$  veralgemeende coördinaten  $q_k$ . De Lagrangiaan is  $L = T - V$ , waarbij de kinetische energie de vorm heeft (zie vergelijking (159) van de cursus):

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k,\ell} m_{k\ell}(q_1, \dots, q_n) \dot{q}_k \dot{q}_\ell, \quad (14)$$

met  $m_{k\ell}(q_1, \dots, q_n) = \sum_i m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\ell}$  coëfficiënten die van de posities afhangen. De potentiële energie  $V(q_1, \dots, q_n)$  hangt enkel van de coördinaten af.

### Evenwichtsposities

#### Definitie – Evenwichtspositie

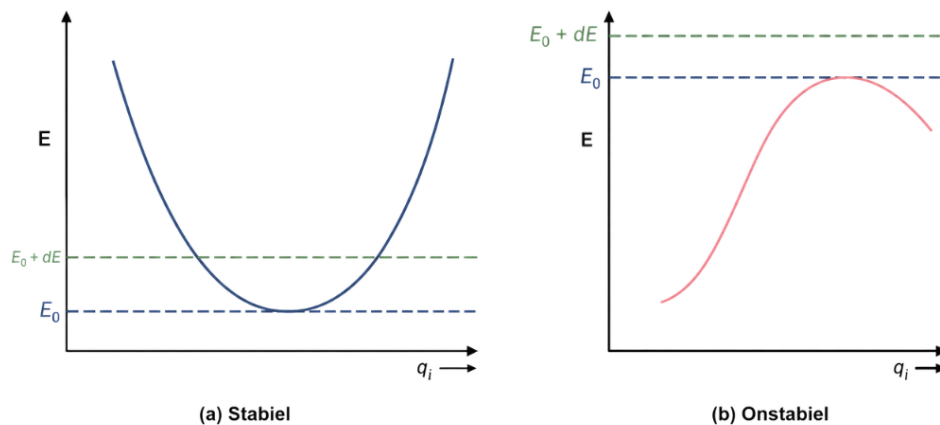
Een punt  $(q_1^0, \dots, q_n^0)$  in de configuratieruimte is een **evenwichtspositie** als alle veralgemeende krachten er nul zijn:

$$Q_k = - \left. \frac{\partial V}{\partial q_k} \right|_0 = 0 \quad \text{voor alle } k.$$

In een evenwichtspositie verdwijnt de gradiënt van de potentiële energie: het is een *stationair punt* van  $V$ . Als het systeem op begintijdstip exact in de evenwichtspositie zit en de beginsnelheden nul zijn, dan blijft het er voor altijd.

### Stabiliteit.

- **Stabiël evenwicht:** een kleine verstoring geeft een begrensde beweging; het systeem keert terug naar de buurt van het evenwicht. Dit correspondeert met een *minimum* van de potentiaalfunctie  $V$  (zie onderstaande figuur).
- **Instabiël evenwicht:** een kleine verstoring groeit exponentieel; het systeem verrijkt zich van het evenwicht. Dit correspondeert met een *maximum* van  $V$ .



**Opmerking.** In deze figuur stelt  $E$  de totale energie van het systeem voor,  $E = T + V$ , waarbij  $V(q_i)$  de potentiële energie is als functie van de veralgemeende coördinaat  $q_i$ . De horizontale lijnen  $E_0$  en  $E_0 + dE$  geven respectievelijk de energie in het evenwichtspunt en een licht verstoorde energie weer. Beweging is enkel mogelijk in gebieden waar  $E \geq V(q_i)$ , aangezien de kinetische energie  $T \geq 0$ .

In de linker grafiek heeft  $V(q_i)$  een minimum, wat overeenkomt met een stabiel evenwicht: kleine verstoringen blijven in de buurt van het evenwichtspunt. In de rechter grafiek heeft  $V(q_i)$  een maximum, wat een instabiël evenwicht geeft: kleine verstoringen groeien uit en het systeem verlaat het evenwicht.

Wij beperken ons tot *stabiele* evenwichtsposities.

### Kleine uitwijkingen en nieuwe coördinaten

We introduceren nieuwe veralgemeende coördinaten die de *afwijking van het evenwicht* meten:

$$\eta_k = q_k - q_k^0$$

De  $\eta_k$  zijn de kleine uitwijkingen. We onderstellen dat ze alsook hun afgeleiden  $\dot{\eta}_k$  allemaal klein zijn.

## Kwadratische benadering van de potentiële energie

We ontwikkelen  $V(q_1, \dots, q_n)$  in een machtreeks rond het evenwichtspunt en houden slechts termen tot en met tweede orde bij:

$$V(q_1, \dots, q_n) = V_0 + \sum_k \left. \frac{\partial V}{\partial q_k} \right|_0 \eta_k + \frac{1}{2} \sum_{k,\ell} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial q_\ell} \right|_0 \eta_k \eta_\ell + \dots$$

Twee vereenvoudigingen:

- De **lineaire term** verdwijnt: in een evenwichtspositie is  $\left. \frac{\partial V}{\partial q_k} \right|_0 = 0$ .
- De **constante term**  $V_0$  kan weggelaten worden (de potentiaal is slechts bepaald op een constante na).

Er blijft over:

$$V \approx \frac{1}{2} \sum_{k,\ell} V_{k\ell} \eta_k \eta_\ell, \quad \text{met } V_{k\ell} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial q_\ell} \right|_0 = V_{\ell k}.$$

De coëfficiënten  $V_{k\ell}$  zijn de tweede partiële afgeleiden van  $V$  in het evenwichtspunt. Ze vormen een reëel-symmetrische  $n \times n$  matrix  $[V]$ , de **Hessiaan-matrix** (of potentiaalmatrix).

## Kwadratische benadering van de kinetische energie

De kinetische energie van een holonom systeem heeft de algemene vorm (zie vgl (14)):

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k,\ell} m_{k\ell}(q_1, \dots, q_n) \dot{q}_k \dot{q}_\ell,$$

waarbij de coëfficiënten  $m_{k\ell}(q_1, \dots, q_n)$  functies zijn van de veralgemeende coördinaten.

**Overschakeling naar de uitwijkingen.** We kunnen de coördinaten schrijven als kleine afwijkingen rond een evenwichtspunt  $q_k = q_k^0 + \eta_k$ , en  $\dot{q}_k = \dot{\eta}_k$ , daarmee wordt de kinetische energie:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k,\ell} m_{k\ell}(q_1, \dots, q_n) \dot{\eta}_k \dot{\eta}_\ell.$$

**Taylorontwikkeling van de massacoëfficiënten.** We ontwikkelen  $m_{k\ell}$  rond het evenwichtspunt  $q^0 = (q_1^0, \dots, q_n^0)$ :

$$m_{k\ell}(q_1, \dots, q_n) = m_{k\ell}(q^0) + \sum_m \left. \frac{\partial m_{k\ell}}{\partial q_m} \right|_{q^0} \eta_m + \dots$$

Ingevuld in de kinetische energie geeft dit:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k,\ell} \left( m_{k\ell}(q^0) + \sum_m \left. \frac{\partial m_{k\ell}}{\partial q_m} \right|_{q^0} \eta_m + \dots \right) \dot{\eta}_k \dot{\eta}_\ell.$$

**Verwaarlozing van hogere termen.** Omdat elke term reeds de factor  $\dot{\eta}_k \dot{\eta}_\ell$  bevat, is  $T$  minstens van tweede orde in de kleine grootheden.

Daaruit volgt:

- De term  $m_{k\ell}(q^0)\dot{\eta}_k\dot{\eta}_\ell$  is van tweede orde en wordt behouden.
- De termen van de vorm  $\eta_m\dot{\eta}_k\dot{\eta}_\ell$  zijn van derde orde en worden verwaarloosd in de kwadratische benadering.

Een lineaire term in  $\eta$  zonder snelheden kan niet voorkomen, omdat  $T$  altijd minstens twee snelheidsfactoren bevat.

**Resultaat.** Na het weglaten van alle termen van orde drie en hoger blijft:

$$T \approx \frac{1}{2} \sum_{k,\ell} T_{k\ell} \dot{\eta}_k \dot{\eta}_\ell,$$

waarbij:

$$T_{k\ell} = m_{k\ell}(q^0) = T_{\ell k}.$$

De symmetrie  $T_{k\ell} = T_{\ell k}$  volgt rechtstreeks uit de symmetrie van  $m_{k\ell}$ .

De coëfficiënten  $T_{k\ell}$  vormen een reëel-symmetrische  $n \times n$ -matrix  $[T]$ , de **massamatrix** (of kinetische matrix).

## De Lagrangiaan in de harmonische benadering

De Lagrangiaan in de kwadratische benadering (*harmonische benadering*) is:

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_{k,\ell} (T_{k\ell} \dot{\eta}_k \dot{\eta}_\ell - V_{k\ell} \eta_k \eta_\ell).$$

De bijbehorende Lagrangevergelijkingen zijn:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial \eta_k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{\ell} T_{k\ell} \ddot{\eta}_\ell + \sum_{\ell} V_{k\ell} \eta_\ell = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Dit is een stelsel van  $n$  gekoppelde, lineaire, tweede-orde differentiaalvergelijkingen met *constante* coëfficiënten. De lineaire aard en de constante coëfficiënten maken exponentiële oplossingen geschikt.

In matrixnotatie:

$$[T][\ddot{\eta}(t)] + [V][\eta(t)] = [0].$$

## De eigenwaardevergelijking en normaaltrillingen (G6.2)

### De trillingsansatz

Omdat we oscillerend gedrag verwachten, proberen we oplossingen van de vorm:

$$\eta_k(t) = C a_k e^{-i\omega t},$$

met  $\omega$  een reële frequentie, en  $C, a_k$  (eventueel complexe) constanten. De puur imaginaire exponent is gekozen zodat we oscillaties beschrijven; de *werkelijke* uitwijkingen zijn het reële deel van deze uitdrukking.

Substitutie in de Lagrangevergelijkingen geeft (na deling door  $Ce^{-i\omega t}$ ):

$$\sum_{\ell} V_{k\ell} a_{\ell} = \omega^2 \sum_{\ell} T_{k\ell} a_{\ell}, \quad k = 1, \dots, n.$$

In matrixnotatie, met  $\lambda = \omega^2$ :

$$[V][a] = \lambda [T][a].$$

Dit is een **veralgemeend eigenwaardeprobleem**: men zoekt eigenwaarden  $\lambda$  en bijbehorende eigenvectoren  $[a]$ . Het heet “veralgemeend” omdat in het rechterlid de massamatrix  $[T]$  staat in plaats van de eenheidsmatrix.

### Eigenschappen van de potentiaalmatrix $[V]$

De potentiaalmatrix  $[V]$  is de Hessiaan-matrix van  $V$  in het evenwichtspunt. Als reëel-symmetrische matrix heeft ze  $n$  reële eigenwaarden.

**Classificatie van stationaire punten.** De aard van een stationair punt hangt af van de eigenwaarden van de Hessiaan:

- **Alle eigenwaarden positief** ( $[V]$  positief definit): het punt is een minimum van  $V \Rightarrow$  stabiel evenwicht.
- **Alle eigenwaarden negatief**: het punt is een maximum van  $V \Rightarrow$  instabiel evenwicht.
- **Gemengde tekens**: zadelpunt (instabiel evenwicht in sommige richtingen).
- **Nuleigenwaarden** (positief semidefinit): een nuleigenwaarde betekent dat  $V$  in de bijbehorende richting *vlak* is, de potentiaal verandert daar (tot tweede orde) niet. Het systeem heeft dan geen drijvende kracht terug naar evenwicht in die richting: *onverschillig evenwicht*. Dit treedt typisch op wanneer de potentiaal niet afhangt van een bepaalde coördinaat, bijvoorbeeld bij translatie- of rotatie-invariantie.

Voor een stabiel evenwicht geldt: voor elke kleine uitwijking  $[\eta]$  is  $[\eta]^T [V] [\eta] > 0$ , d.w.z.  $[V]$  is positief definit (of semidefinit als nuleigenwaarden aanwezig zijn), de uitwerking vindt je ook terug op de slides hiervan.

## Eigenschappen van de massamatrix $[T]$

De massamatrix  $[T]$  is altijd **positief definitief**. Dit volgt rechtstreeks uit de fysische betekenis van de kinetische energie:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k,\ell} T_{k\ell} \dot{\eta}_k \dot{\eta}_\ell = \frac{1}{2} [\dot{\eta}]^T [T] [\dot{\eta}],$$

en omdat kinetische energie altijd strikt positief is voor een bewegend systeem ( $[\dot{\eta}] \neq [0]$ ), geldt per definitie:

$$\forall [a] \neq [0] : [a]^T [T] [a] > 0.$$

Dit is precies de definitie van positief definitief, met  $[a] = [\dot{\eta}]$ .

Als een eigenwaarde  $\lambda \leq 0$  zou zijn, kon men een vector  $[a]$  vinden waarvoor  $[a]^T [T] [a] \leq 0$ , contradictie. Alle eigenwaarden van  $[T]$  zijn dus strikt positief, en bijgevolg is  $[T]$  inverteerbaar.

## Reductie tot een gewoon eigenwaardeprobleem

Omdat  $[T]$  positief definitief is, bestaat haar vierkantswortel  $[T]^{1/2}$  en haar inverse vierkantswortel  $[T]^{-1/2}$ . Deze worden gedefinieerd via diagonalisatie: als  $[T] = [O][\lambda_T][O]^T$ , met  $[\lambda_T]$  de diagonaalmatrix, dan:

$$[T]^{1/2} := [O][\sqrt{\lambda_T}][O]^T, \quad [T]^{-1/2} := [O][1/\sqrt{\lambda_T}][O]^T,$$

waarbij  $[\sqrt{\lambda_T}]$  de diagonaalmatrix is met de vierkantswortel van de eigenwaarden van  $[T]$ . De definitie van  $[T]^{-1/2}$  is ook goed gedefinieerd aangezien alle eigenwaarden positief zijn. Merk verder ook op dat  $[T]^{1/2} [T]^{1/2} = [T]$  en  $[T]^{-1/2} [T]^{1/2} = [1]$ , wat je dus zou verwachten.

We voeren nu enkele definities in:

$$[a'] := [T]^{1/2}[a], \quad [V'] := [T]^{-1/2}[V][T]^{-1/2}.$$

Het veralgemeend eigenwaardeprobleem  $[V][a] = \lambda [T][a]$  wordt dan:

$$\begin{aligned} [V][a] &= \lambda [T][a] \\ [V][T]^{-1/2}([T]^{1/2}[a]) &= \lambda [T]^{1/2}([T]^{1/2}[a]) \\ [V][T]^{-1/2}[a'] &= \lambda [T]^{1/2}[a'] \\ [T]^{-1/2}[V][T]^{-1/2}[a'] &= \lambda [a'] \\ [V'][a'] &= \lambda [a'] \end{aligned}$$

Dit is nu een **gewoon eigenwaardeprobleem** voor de matrix  $[V']$ . De matrix  $[V'] = [T]^{-1/2}[V][T]^{-1/2}$  is reëel en symmetrisch (dit volgt uit de symmetrie van  $[V]$  en  $[T]$ ). Bijgevolg:

- $[V']$  heeft  $n$  reële eigenwaarden  $\lambda_\nu$  ( $\nu = 1, \dots, n$ ).
- De bijbehorende eigenvectoren  $[e'_\nu]$  zijn reëel en vormen een orthonormale basis:  $[e'_\nu]^T [e'_\mu] = \delta_{\mu\nu}$ , de eigenvectoren van het oorspronkelijk probleem kan je vinden uit het verband  $[a'] = [T]^{1/2}[a]$ .

## Eigenwaarden zijn niet-negatief: reële frequenties

Omdat  $[V]$  positief semidefinit is ( $[a]^T[V][a] \geq 0, \quad \forall [a] \neq [0]$ ), geldt voor elke eigenvector  $[e'_\nu]$ :

$$[V'][e'_\nu] = \lambda_\nu [e'_\nu] \quad \Rightarrow \quad \lambda_\nu = [e'_\nu]^T [V'] [e'_\nu]$$

en dus geldt voor  $\lambda_\nu$

$$\lambda_\nu = [e'_\nu]^T [V'] [e'_\nu] = [e_\nu]^T \underbrace{[T]^{1/2} [T]^{-1/2}}_{=[1]} [V] \underbrace{[T]^{-1/2} [T]^{1/2}}_{=[1]} [e_\nu] = [e_\nu]^T [V] [e_\nu] \geq 0,$$

waarbij  $[e'_\nu]^T [e'_\nu] = 1$  wegens de orthonormaliteit en  $[e_\nu] = [T]^{-1/2} [e'_\nu]$  de eigenvector van het originele veralgemeende probleem is.

Bijgevolg zijn alle eigenwaarden  $\lambda_\nu \geq 0$ . Dus we kunnen nu stellen dat  $\lambda_\nu = \omega_\nu^2$ , waardoor de trillingsfrequenties  $\omega_\nu$  reëel zijn. (Imaginaire frequenties geven exponentieel groeiende, dus instabiele oplossingen.)

## Normaaltrillingen

### Definitie – Normaaltrilling

Een **normaaltrilling** (of normale modus)  $\nu$  is de speciale oplossing van het bewegingsstelsel waarbij alle coördinaten  $\eta_k(t)$  met dezelfde frequentie  $\omega_\nu$  oscilleren, met amplitudes  $f_\nu$  die evenredig zijn met de componenten van de eigenvector  $[e_\nu]$  en fazes  $\delta_\nu$  zodat:

$$[\eta_\nu(t)] = f_\nu [e_\nu] \cos(\omega_\nu t + \delta_\nu).$$

De eigenvectoren  $[e_\nu]$  van het veralgemeende probleem  $[V][e_\nu] = \omega_\nu^2 [T][e_\nu]$  voldoen aan de **veralgemeende orthonormaliteitsbetrekking**:

$$[e_\nu]^T [T] [e_\mu] = \delta_{\nu\mu}.$$

Dit volgt rechtstreeks uit de gewone orthonormaliteit  $[e'_\nu]^T [e'_\mu] = \delta_{\nu\mu}$ , de symmetrie van  $[T]^{1/2}$  en het verband  $[e'_\nu] = [T]^{1/2} [e_\nu]$ .

## Algemene oplossing voor kleine trillingen (G6.3)

### Superpositie van normaaltrillingen

Omdat de bewegingsvergelijkingen lineair zijn, is de **algemene oplossing** een lineaire superpositie van alle normaaltrillingen:

$$[\eta(t)] = \sum_{\nu} C_{\nu} [e_{\nu}] e^{-i\omega_{\nu}t},$$

waarbij de  $C_{\nu}$  complexe constanten zijn. Door over te gaan op modulus en fase,  $C_{\nu} = f_{\nu} e^{-i\delta_{\nu}}$  (met  $f_{\nu} = |C_{\nu}| \geq 0$  en  $\delta_{\nu}$  reëel), en enkel het reële deel te nemen:

$$[\eta(t)] = \sum_{\nu} f_{\nu} [e_{\nu}] \cos(\omega_{\nu}t + \delta_{\nu}).$$

De  $2n$  reële constanten  $f_{\nu}$  en  $\delta_{\nu}$  (amplitudes en fazen) worden bepaald door de beginvoorwaarden (zie hieronder).

## Bepaling van amplitudes en fasen uit beginvoorwaarden

Gegeven de beginuitwijkingen  $[\eta(0)]$  en beginsnelheden  $[\dot{\eta}(0)]$ , evalueren we de algemene oplossing op  $t = 0$ :

$$[\eta(0)] = \sum_{\nu} f_{\nu} \cos \delta_{\nu} [e_{\nu}], \quad [\dot{\eta}(0)] = - \sum_{\nu} f_{\nu} \omega_{\nu} \sin \delta_{\nu} [e_{\nu}].$$

Om de bijdrage van de  $\mu$ -de normaaltrilling te isoleren, vermenigvuldigen we links met  $[e_{\mu}]^T [T]$  en gebruiken de orthonormaliteitsbetrekking  $[e_{\mu}]^T [T] [e_{\nu}] = \delta_{\mu\nu}$ :

$$x_{\mu} := [e_{\mu}]^T [T] [\eta(0)] = f_{\mu} \cos \delta_{\mu},$$

$$y_{\mu} := [e_{\mu}]^T [T] [\dot{\eta}(0)] = -f_{\mu} \omega_{\mu} \sin \delta_{\mu}.$$

De amplitude en fase van elke normaaltrilling volgen dan uit:

$$f_{\mu}^2 = x_{\mu}^2 + \frac{y_{\mu}^2}{\omega_{\mu}^2}, \quad \tan \delta_{\mu} = -\frac{y_{\mu}}{\omega_{\mu} x_{\mu}}.$$

**Samenvattend algoritme.** Het probleem van kleine trillingen wordt volledig opgelost door:

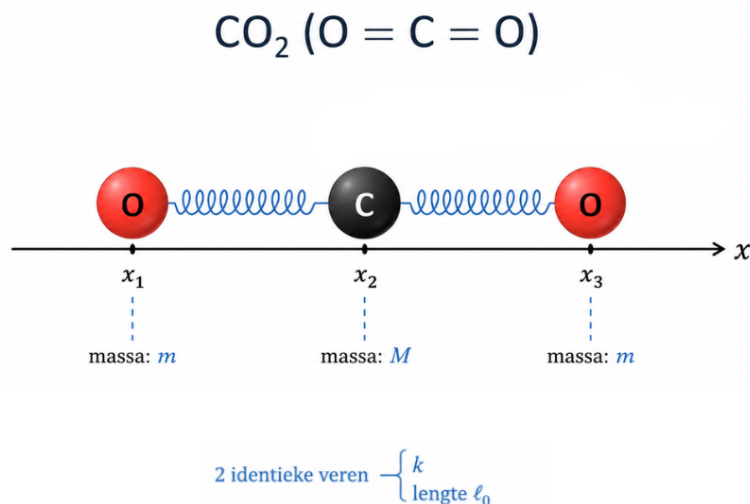
1. Stel de matrices  $[V]$  en  $[T]$  op.
2. Los het veralgemeend eigenwaardeprobleem  $[V][e_{\nu}] = \omega_{\nu}^2 [T][e_{\nu}]$  op om de normaaltrillingfrequenties  $\omega_{\nu}$  en normaaltrillingvectoren  $[e_{\nu}]$  te vinden.
3. Bepaal de amplitudes  $f_{\nu}$  en fasen  $\delta_{\nu}$  uit de beginvoorwaarden via de formules boven.
4. De volledige tijdsevolutie is dan  $[\eta(t)] = \sum_{\nu} f_{\nu} [e_{\nu}] \cos(\omega_{\nu} t + \delta_{\nu})$ .

**Opmerking** (Nulfrequenties en goudverschilligheid). Als een nuleigenwaarde  $\omega_{\nu} = 0$  optreedt, dan is de bijbehorende normaaltrilling geen echte oscillatie maar een *verschuiving*:  $[\eta_{\nu}(t)] = (x_{\nu} + y_{\nu} t)[e_{\nu}]$ . Dit treedt op bij *onverschillig evenwicht* in een bepaalde richting, bvb. door translatie-invariantie van de potentiaal.

## Toepassing: de lineaire triatomische molecule (G6.4)

### Beschrijving van het systeem

Een lineaire triatomische molecule bestaat uit drie atomen op een lijn. Het middelste atoom heeft massa  $M$ , de twee buitenste atomen elk massa  $m$ . De atomen zijn onderling verbonden door twee veren, elk met veerconstante  $k$  en evenwichtslengte  $\ell_0$ . We beschouwen enkel de longitudinale trillingen (langs de molecuulAs).



### De matrices $[T]$ en $[V]$

De kinetische energie is simpelweg:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_3^2,$$

zodat de massamatrix diagonaal is:

$$[T] = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}.$$

De potentiële energie hangt af van de lengte van de veer en de evenwichtslengte:

$$V = \frac{1}{2}k(x_2 - x_1 - \ell_0)^2 + \frac{1}{2}k(x_3 - x_2 - \ell_0)^2.$$

Het lijkt logisch om te kijken of  $(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = (-\ell_0, 0, \ell_0)$  een evenwichtspunt is:

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial V}{\partial x_1} \right|_0 = -k(x_2 - x_1 - \ell_0)|_0 = -k(0 - (-\ell_0) - \ell_0) = 0 \\ \left. \frac{\partial V}{\partial x_2} \right|_0 = k(x_2 - x_1 - \ell_0)|_0 - k(x_3 - x_2 - \ell_0)|_0 = 0 \\ \left. \frac{\partial V}{\partial x_3} \right|_0 = -k(x_3 - x_2 - \ell_0)|_0 = -k(\ell_0 - 0 - \ell_0) = 0 \end{cases}$$

Dus het is inderdaad een evenwichtspunt.

Berekening van de Hessiaan gebeurt nu als volgt:

$$[V]_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}(x_1^0, x_2^0, x_3^0) \quad \Rightarrow \quad [V] = \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

De matrix  $[V]$  is positief semidefinit: de eigenwaarden van  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  zijn 0, 1, 3, zodat de eigenwaarden van  $[V]$  gelijk zijn aan 0,  $k$ ,  $3k$ . Dat 0 een eigenwaarde is, betekent dat het systeem translatiesymmetrie bezit.

De eigenvector bij  $\lambda = 0$  volgt uit  $[V][a] = \vec{0}$ :

$$\begin{cases} a_1 - a_2 = 0 \\ -a_1 + 2a_2 - a_3 = 0 \\ -a_2 + a_3 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad [a] = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dit stelt een zuivere translatie voor: alle atomen bewegen even veel in dezelfde richting, de veren vervormen niet.

## Het veralgemeend eigenwaardeprobleem

We lossen  $[V][a] = \lambda [T][a]$  op. Invullen van  $[V]$  en  $[T]$  geeft:

$$k \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} [a] = \lambda m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & M/m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} [a].$$

Delen door  $k$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} [a] = \frac{\lambda m}{k} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & M/m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} [a].$$

We voeren de dimensieloze parameter  $\lambda' = \frac{\lambda m}{k}$  in. Dan heeft het probleem nog slechts één vrije parameter  $M/m$ :

$$\det \left( \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda' \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & M/m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 0.$$

Uitwerking van de determinant levert:

$$(1 - \lambda') \left[ \left( 2 - \lambda' \frac{M}{m} \right) (1 - \lambda') - 1 \right] = 0.$$

Dit geeft  $\lambda' = 1$  of  $\lambda' \left( \lambda' - 1 - \frac{2m}{M} \right) = 0$ , dus:

$$\lambda'_1 = 0, \quad \lambda'_2 = 1, \quad \lambda'_3 = 1 + \frac{2m}{M}.$$

Terugschakelen via  $\lambda = \frac{k}{m}\lambda'$  en  $\omega^2 = \lambda$ :

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 + \frac{2m}{M}\right)}.$$

## De drie normaaltrillingfrequenties

Het veralgemeend eigenwaardeprobleem  $[V][a] = \omega^2[T][a]$  heeft drie oplossingen:

1.  $\omega_1 = 0$ : **nulmodus (translatie)**. De eigenvector is  $[a] = (1, 1, 1)^T$ : alle atomen verschuiven even veel in dezelfde richting. De veren vervormen niet, dus  $V$  verandert niet en er is geen teruggedrijvende kracht. Dit is geen echte trilling maar een *starre verplaatsing* van de hele molecule, vandaar  $\omega = 0$ .
2.  $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ : **symmetrische modus**. De eigenvector is van de vorm  $[a] = (1, 0, -1)^T$ : de twee buitenste atomen bewegen in tegengestelde richting, het middelste atoom staat stil. De frequentie hangt enkel af van  $m$  (de massa van de buitenste atomen) en  $k$ , want het centrale atoom doet niet mee.
3.  $\omega_3 = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 + \frac{2m}{M}\right)}$ : **antisymmetrische modus**. De twee buitenste atomen bewegen samen in één richting, het centrale atoom beweegt in de tegenovergestelde richting. Nu doen alle drie de atomen mee, en beide veren worden tegelijk samengedrukt en uitgerekt, vandaar de hogere frequentie. Hoe lichter het centrale atoom (kleine  $M$ ), hoe groter  $\omega_3$ .

**Opmerking.** In de limiet  $M \rightarrow \infty$  (oneindig zwaar centraal atoom) geldt  $\omega_3 \rightarrow \omega_2$ : het centrale atoom staat dan ook stil in de derde modus, en de twee modi worden gelijk. Voor  $M \rightarrow 0$  daarentegen gaat  $\omega_3 \rightarrow \infty$ : een bijna massaloos centraal atoom trilt oneindig snel.

## Hoofdstuk 8: Het Hamilton-formalisme

### Inleiding: van Lagrange naar Hamilton

Tot nu toe beschreven we klassieke mechanica met het *Lagrange-formalisme*: de dynamica van een systeem wordt volledig vastgelegd door de Lagrangiaan  $L(q_k, \dot{q}_k, t)$ , een scalaire functie van de veralgemeende coördinaten  $q_k$  en de bijbehorende snelheden  $\dot{q}_k$ . De bewegingsvergelijkingen zijn  $n$  differentiaalvergelijkingen van de *tweede orde*.

In dit hoofdstuk introduceren we een alternatieve maar equivalente beschrijving: het *Hamilton-formalisme*. De overstap is conceptueel elegant: in plaats van te werken met coördinaten  $q_k$  en snelheden  $\dot{q}_k$  als basisvariabelen, werken we met coördinaten  $q_k$  en momenten  $p_k$ . Het resultaat is een stelsel van  $2n$  differentiaalvergelijkingen van de *eerste orde*: de canonische vergelijkingen van Hamilton.

Dit formalisme geeft in principe geen wiskundige vereenvoudiging. Zijn grote kracht ligt elders:

- De Hamilton-formulering vormt de brug naar de **kwantummechanica**, die gemodelleerd is naar analogie met het Hamilton-formalisme.
- Ze is de basis van de **statistische mechanica** (stelling van Liouville, fasruimte).
- Ze speelt een centrale rol in de **chaos-theorie** en in de studie van integreerbare systemen.

## De bewegingsvergelijkingen van Hamilton (G8.1)

### Vertrekpunt: het Lagrange-formalisme

We beschouwen een systeem met  $n$  vrijheidsgraden, beschreven door veralgemeende coördinaten  $q_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ). De Lagrangiaan is:

$$L = T - V \equiv L(q_k, \dot{q}_k, t),$$

en de bijbehorende Lagrangevergelijkingen zijn:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Dit zijn  $n$  tweede-orde differentiaalvergelijkingen voor de onbekende functies  $q_k(t)$ . Om een unieke oplossing te bepalen, moeten we  $2n$  beginvoorwaarden opgeven: de beginposities  $q_k(t_0)$  en de beginsnelheden  $\dot{q}_k(t_0)$ .

### De veralgemeende momenten

Uit de Lagrangiaan definiëren we de **veralgemeende (of canonisch toegevoegde) momenten**:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}(q_k, \dot{q}_k, t), \quad k = 1, \dots, n.$$

In het geval van een deeltje in Cartesische coördinaten geeft dit gewoon de gewone impuls terug (zie ook de discussie in G2.6 van de cursus). In het algemeen heeft  $p_k$  niet de dimensie van impuls, maar het product  $p_k \dot{q}_k$  heeft altijd de dimensie van energie.

Het idee van de overgang naar het Hamilton-formalisme is: gebruik de  $n$  vergelijkingen  $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$  om de  $n$  snelheden  $\dot{q}_k$  te elimineren en te vervangen door de  $n$  momenten  $p_k$ . De  $2n$  variabelen  $(q_k, p_k)$  worden de nieuwe basisvariabelen.

## De Hamiltoniaan: definitie via de Legendre-transformatie

### Definitie – Hamiltoniaan

De **Hamiltoniaan**  $H$  is de scalaire functie van  $(q_k, p_k, t)$  gedefinieerd door:

$$H(q_k, p_k, t) = \sum_k p_k \dot{q}_k - L(q_k, \dot{q}_k, t),$$

waarbij in het rechterlid de snelheden  $\dot{q}_k$  worden uitgedrukt als functies van  $(q_k, p_k, t)$  via  $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ .

Dit is een voorbeeld van een **Legendre-transformatie**: een techniek om van een beschrijving in termen van een variabele (hier  $\dot{q}_k$ ) over te stappen naar een beschrijving in termen van de bijbehorende partiële afgeleide (hier  $p_k$ ), door het invoeren van een nieuwe scalaire functie. Dezelfde techniek duikt op in de thermodynamica (overgang tussen energie, enthalpie, vrije energie, ...).

## Afleiding van de canonische vergelijkingen van Hamilton

We leiden de bewegingsvergelijkingen in de nieuwe variabelen af door de totale differentiaal van  $H$  op twee manieren te berekenen.

**Manier 1: direct vanuit de definitie van  $H$ .** De totale differentiaal van  $H(q_k, p_k, t)$  is:

$$dH = \sum_k \frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \sum_k \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \quad (15)$$

**Manier 2: vanuit de definitie  $H = \sum_k p_k \dot{q}_k - L$ .** We berekenen het totale differentiaal van het rechterlid:

$$\begin{aligned} dH &= d\left(\sum_k p_k \dot{q}_k - L\right) \\ &= \sum_k \dot{q}_k dp_k + \sum_k p_k d\dot{q}_k - \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k - \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \end{aligned}$$

Omdat  $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ , vallen de tweede en vierde som tegen elkaar weg:

$$dH = \sum_k \dot{q}_k dp_k - \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (16)$$

**Vergelijking van de twee uitdrukkingen** (15) en (16) Door de coëfficiënten van  $dq_k$ ,  $dp_k$  en  $dt$  te identificeren, vinden we:

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k, \quad \frac{\partial H}{\partial q_k} = -\frac{\partial L}{\partial q_k}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

De Lagrangevergelijking  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k}$  kunnen we nu herschrijven als  $\dot{p}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k}$ . Gecombineerd met de tweede identiteit hierboven vinden we:

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}.$$

## De canonische vergelijkingen van Hamilton

Samengevat zijn de bewegingsvergelijkingen in het Hamilton-formalisme:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}(q_k, p_k, t), \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}(q_k, p_k, t).$$

Dit zijn de **canonische vergelijkingen van Hamilton** (de term “canonisch” betekent zoveel als “in standaardvorm”). Ze vormen een stelsel van  $2n$  eerste-orde differentiaalvergelijkingen voor de  $2n$  onbekende functies  $q_k(t)$  en  $p_k(t)$ .

### Interpretatie.

- De **eerste vergelijking** ( $\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$ ) geeft het verband tussen de snelheden en de momenten. Ze is geen nieuwe fysica, maar legt het kinematische verband vast.
- De **tweede vergelijking** ( $\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$ ) is de eigenlijke dynamica: ze beschrijft hoe de momenten veranderen onder invloed van de krachten. Ze is de Hamilton-formulering van de tweede wet van Newton.
- Samen zijn de twee vergelijkingen volledig equivalent met de Lagrangevergelijkingen, en dus ook met de Newtoniaanse bewegingsvergelijkingen.

**De fasruimte.** De  $2n$ -dimensionale ruimte van alle paren  $(q_k, p_k)$  wordt de **fasruimte** genoemd. De tijdsevolutie van het systeem beschrijft een *baan in de fasruimte*. De canonische vergelijkingen beschrijven precies hoe die baan verloopt.

## De Hamiltoniaan als energie

In het gewone geval van holonoom-tijdsonafhankelijke bindingen en conservatieve krachten geldt:

1. De transformatie van Cartesische naar veralgemeende coördinaten hangt niet expliciet van de tijd af, zodat de kinetische energie een homogene kwadratische veelterm is in de snelheden  $\dot{q}_k$ .
2. De potentiële energie  $V$  hangt enkel van de coördinaten  $q_k$  af.

In dit geval is  $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$ . Via de stelling van Euler voor homogene functies (zie G2.7) geldt dan:

$$\sum_k p_k \dot{q}_k = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = 2T.$$

De Hamiltoniaan wordt dan:

$$H = \sum_k p_k \dot{q}_k - L = 2T - (T - V) = T + V = \text{totale mechanische energie.}$$

De Hamiltoniaan stemt overeen met de totale energie van het systeem, en is een behouden grootheid (zie ook G2.7 waar dit eerder werd aangetoond).

## De Legendre-transformatie in breder perspectief

De overgang van Lagrange naar Hamilton is een mooi voorbeeld van een Legendre-transformatie: men vervangt de “snelheidsafhankelijkheid” door “momentafhankelijkheid”, en introduceert een nieuwe scalaire functies (de Hamiltoniaan). Hetzelfde patroon komt veelvuldig voor in de fysica:

- In de **thermodynamica**: de inwendige energie  $U(S, V)$  wordt via Legendre-transformaties omgezet in de enthalpie  $H(S, P)$ , de Helmholtz-vrije energie  $F(T, V)$ , en de Gibbs-vrije energie  $G(T, P)$ , al naargelang welke variabelen het meest praktisch zijn.
- In de **kwantummechanica**: de canonische vergelijkingen van Hamilton vormen het startpunt voor de kwantisatie via de vervangingsregel  $p_k \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_k}$ .

## Draaiboek voor het opstellen van de Hamiltoniaan (G8.1)

### Stapsgewijze procedure

In de praktijk stelt men de Hamiltoniaan op via de volgende stappen:

1. **Kies veralgemeende coördinaten** en stel de kinetische energie  $T(q_k, \dot{q}_k)$ , de potentiële energie  $V(q_k)$ , en de Lagrangiaan  $L = T - V$  op als functies van de  $q_k$  en  $\dot{q}_k$ .
2. **Definieer de veralgemeende momenten** via:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}.$$

3. **Stel de Hamiltoniaan op**:

$$H = \sum_k p_k \dot{q}_k - L.$$

4. **Elimineer de snelheden**: los de vergelijkingen  $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$  op naar de  $\dot{q}_k$  als functies van de  $(q_k, p_k)$ .
5. **Substitueer** de verkregen uitdrukkingen voor  $\dot{q}_k$  in  $H$ , zodat  $H$  een zuivere functie van  $(q_k, p_k, t)$  wordt.

## Generiek geval: kwadratische kinetische energie

In het standaardgeval van conservatieve krachten en tijdsafhankelijke bindingen is de kinetische energie een kwadratische vorm in de snelheden. In matrixnotatie schrijven we:

$$T = \frac{1}{2}[\dot{q}]^T [m(q)] [\dot{q}],$$

waarbij  $[m(q)]$  een symmetrische, positief-definiëte  $n \times n$  matrix is die afhangt van de coördinaten.

### Stap 2: momenten.

$$[p] = [m(q)] [\dot{q}].$$

### Stap 3: Hamiltoniaan voor eliminatie.

$$H = [p]^T [\dot{q}] - \frac{1}{2} [\dot{q}]^T [m(q)] [\dot{q}] + V(q).$$

### Stap 4: snelheden elimineren. Omdat $[m(q)]$ inverteerbaar is:

$$[\dot{q}] = [m(q)]^{-1} [p].$$

### Stap 5: de Hamiltoniaan in de eindvorm.

$$H = \frac{1}{2} [p]^T [m(q)]^{-1} [p] + V(q).$$

Dit is de **standaardvorm van de Hamiltoniaan** voor conservatieve systemen met tijdsafhankelijke bindingen: de kinetische energie uitgedrukt in momenten plus de potentiële energie.

## Toepassing 1: één deeltje in Cartesische coördinaten

Veralgemeende coördinaten  $(q_1, q_2, q_3) = (x, y, z)$ . De kinetische energie:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

De massamatrix is  $[m] = m[1]$  (schaalfactor maal eenheidsmatrix). De momenten:

$$p_x = m\dot{x}, \quad p_y = m\dot{y}, \quad p_z = m\dot{z}.$$

De Hamiltoniaan:

$$\begin{aligned} H &= \dot{x}p_x + \dot{y}p_y + \dot{z}p_z - \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + V(x, y, z) \\ &= \frac{1}{m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(x, y, z) \\ &= \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + V(x, y, z) = \frac{|\mathbf{p}|^2}{2m} + V(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Dit is de som van kinetische energie (in termen van de impuls  $\mathbf{p}$ ) en potentiële energie: de totale energie. De canonische vergelijkingen geven:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}, \quad \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x},$$

en analoog voor  $y$  en  $z$ . Dit zijn exact de Newtoniaanse bewegingsvergelijkingen.

## Toepassing 2: één deeltje in sferische coördinaten

Veralgemeende coördinaten  $(q_1, q_2, q_3) = (r, \psi, \theta)$ . De kinetische energie in sferische coördinaten (zie G3.2):

$$T = \frac{1}{2}m \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\psi}^2 + r^2 \sin^2 \psi \dot{\theta}^2 \right).$$

De massamatrix is diagonaal:

$$[m] = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & mr^2 & 0 \\ 0 & 0 & mr^2 \sin^2 \psi \end{pmatrix}.$$

De momenten met  $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ :

$$p_r = m\dot{r}, \quad p_\psi = mr^2\dot{\psi}, \quad p_\theta = mr^2 \sin^2 \psi \dot{\theta}.$$

De omgekeerde relaties (snelheden in termen van momenten):

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\psi} = \frac{p_\psi}{mr^2}, \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2 \sin^2 \psi}.$$

De Hamiltoniaan (na berekening analoog aan het vorige voorbeeld):

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\psi^2}{r^2} + \frac{p_\theta^2}{r^2 \sin^2 \psi} \right) + V(r, \psi, \theta).$$

Voor een centraal krachtveld ( $V = V(r)$ ) hangt de Hamiltoniaan niet af van  $\theta$ , zodat  $\theta$  een cyclische coördinaat is en  $p_\theta = mr^2 \sin^2 \psi \dot{\theta}$  (de  $z$ -component van het draaimoment) behouden is. Dit illustreert hoe het Hamilton-formalisme symmetrieën en bijbehorende behoudswetten op een transparante manier zichtbaar maakt.

## Relatie tussen de Hamiltoniaan en het Lagrange-formalisme

### Equivalentie van de twee formuleringen

De canonische vergelijkingen van Hamilton zijn volledig equivalent met de Lagrangevergelijkingen:

- De eerste vergelijking  $\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$  reproduceert het verband  $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$  (in omgekeerde richting).
- De tweede vergelijking  $\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$  reproduceert de Lagrangevergelijking  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k}$ .

Beide zijn dus ook equivalent met de Newtoniaanse wetten. Er is geen nieuwe fysica, maar wel een nieuwe perspectief en een krachtige wiskundige structuur.

## Tijdsafgeleide van de Hamiltoniaan

Een directe berekening geeft:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_k \frac{\partial H}{\partial q_k} \dot{q}_k + \sum_k \frac{\partial H}{\partial p_k} \dot{p}_k + \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Substitueer de canonische vergelijkingen  $\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$  en  $\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$ :

$$\frac{dH}{dt} = \sum_k \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \sum_k \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}.$$

De eerste twee sommen heffen elkaar op. Bijgevolg:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Als de Hamiltoniaan niet expliciet van de tijd afhangt ( $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ ), dan is  $H$  een behouden grootheid. In het geval dat  $H$  de totale energie voorstelt (standaardsituatie), correspondeert dit met energiebehoud.

## Belang en uitbreidingen van het Hamilton-formalisme

### Voordelen en toepassingen

Het Hamilton-formalisme biedt, zoals aangestipt, geen directe wiskundige vereenvoudiging van de bewegingsvergelijkingen. Zijn grote voordelen zijn:

1. **Symmetrische behandeling van coördinaten en momenten.** In de Lagrange-formulering spelen coördinaten  $q_k$  en snelheden  $\dot{q}_k$  een asymmetrische rol:  $L$  is niet symmetrisch in  $q_k$  en  $\dot{q}_k$ . In de Hamilton-formulering zijn coördinaten  $q_k$  en momenten  $p_k$  volledig gelijkwaardig: de canonische vergelijkingen zijn symmetrisch van vorm.
2. **Fasruimte en geometrisch inzicht.** De tijdsevolutie als een stroom in de  $2n$ -dimensionale fasruimte laat toe krachtige geometrische en topologische methoden toe te passen.
3. **Behoudswetten zichtbaar als cyclische coördinaten.** Net als in het Lagrange-formalisme correspondeert elke cyclische coördinaat met een behouden moment. In het Hamilton-formalisme is dit nog transparanter.
4. **Canonische transformaties.** In het Hamilton-formalisme kan men variabelentransformaties uitvoeren die de structuur van de vergelijkingen bewaren. Dit leidt tot krachtige oplossingsmethoden (Hamilton-Jacobi-theorie).
5. **Brug naar de kwantummechanica.** De kwantisatie van een klassiek systeem verloopt via de vervanging:

$$q_k \rightarrow \hat{q}_k, \quad p_k \rightarrow \hat{p}_k = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_k},$$

waarbij  $\hat{q}_k$  en  $\hat{p}_k$  operatoren worden die voldoen aan de commutatierelatie  $[\hat{q}_k, \hat{p}_\ell] = i\hbar \delta_{k\ell}$ . De Hamiltoniaan wordt de Hamiltoniaan-operator  $\hat{H}$ , en de tijdsevolutie

wordt bepaald door de Schrödingervergelijking  $i\hbar \frac{d}{dt}|\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle$ . De structuur van het klassieke Hamilton-formalisme is dus direct zichtbaar in de kwantummechanica.

6. **Statistische mechanica.** De stelling van Liouville (behoud van het fasruimtevolume langs de banen van een Hamiltoniaans systeem) vormt het fundament van de statistische mechanica en de thermodynamische evenwichtstheorie.
7. **Chaos-theorie.** De studie van chaotisch gedrag in deterministische systemen maakt intensief gebruik van de geometrie van de fasruimte en de structuur van het Hamilton-formalisme.

## Samenvatting: Lagrange vs. Hamilton

Eigenschap	Lagrange	Hamilton
Basisvariabelen	$q_k, \dot{q}_k$	$q_k, p_k$
Scalaire functie	$L(q_k, \dot{q}_k, t) = T - V$	$H(q_k, p_k, t)$
Vergelijkingen	$n$ vergelijkingen, orde 2	$2n$ vergelijkingen, orde 1
Ruimte	Configuratieruimte ( $n$ -dim.)	Fasruimte ( $2n$ -dim.)
Energie	$H = T + V$ (onder voorwaarden)	$H$ direct de Hamiltoniaan
Cyclische coörd.	Behoud van $p_k$	Idem