Theorievragen Vector- en Functieruimten

Coene Flor, Delaere Matteo, Deré Axel, Dobbeleer Lukas,
Hilderson Tristan, Prins Ingmar, Sette Dayo, Van Acker Lowie,
Van Hooreweghe Emiel, Verweire Aldrik

2024-2025

Inleiding

Deze verzameling antwoorden is opgesteld ter ondersteuning van de studie en voorbereiding op het theoretische examen van het vak Vector- en Functieruimten, een onderdeel van het tweede bachelorjaar Fysica en Sterrenkunde. Het grootste deel is gebaseerd op de bewijzen en afleidingen uit de cursus **Vector and Function Spaces** van *professor dr. Jutho Haegeman*, met extra verduidelijkingen en eigen alternatieve methoden. Dit document biedt een gestructureerd overzicht van de oplossingen voor de vragen van het theorie-examen 2024-2025 en behandelt onderwerpen zoals: algebraïsche structuren, lineaire afbeeldingen, operatoren, normen, inwendige producten, functieruimten, lineaire differentiaaloperatoren en fourieranalyse en distributietheorie en andere relevante concepten.

Bij meeste bewijzen staat in de titel en onderaan het gevraagd nogmaals vermeldt, op welk stelling, theorema, voorbeeld, opmerking, het antwoord op deze specifieke vraag, gevraagde gebaseerd is, uit de cursus **Vector and Function Spaces**. De titels waarnaast een "**(!)**"te vinden is in de inhoudstafel wijst erop dat dit een vraag is die gesteld werd op het Theorie gedeelde van het examen 1^e zit, academiejaar 2024-2025, voor het vak **Vector- en Functieruimten**

Veel succes met het bestuderen!

Inhoudsopgave

1 Elementaire algebraïsche structuren

(geen rechtstreekse theorievragen)

2 Lineaire afbeeldingen

2.1 De Leibniz-formule (Lemma 2.18)

De Leibniz-formule voor de determinant van een vierkante matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ wordt gegeven door:

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma) A_{1\sigma(1)} A_{2\sigma(2)} \cdots A_{n\sigma(n)} = \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} A_{1i_1} A_{2i_2} \cdots A_{ni_n},$$

met hierin het Levi-Civita symbool

$$\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} = \begin{cases} sgn(\sigma), & \textbf{als } \sigma = (i_1, i_2, \dots, i_n) \in S_n, \\ 0, & \textbf{anders.} \end{cases}$$

Toon aan dat:

$$\epsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} A_{i_1 j_1} A_{i_2 j_2} \cdots A_{i_n j_n} = \det(A) \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}.$$

(Gebaseerd op *Lemma 2.18*)

Bewijs. Als er een permutatie τ bestaat zodanig dat $(i_1, \dots, i_n) = (\tau(1), \dots, \tau(n))$, dan geldt:

$$\begin{aligned} \epsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} A_{i_1 j_1} A_{i_2 j_2} \cdots A_{i_n j_n} &= \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) A_{i_1\sigma(1)} A_{i_2\sigma(2)} \cdots A_{i_n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) A_{\tau(1)\sigma(1)} A_{\tau(2)\sigma(2)} \cdots A_{\tau(n)\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) A_{1,(\tau^{-1}\circ\sigma)(1)} A_{2,(\tau^{-1}\circ\sigma)(2)} \cdots A_{n,(\tau^{-1}\circ\sigma)(n)} \\ &= \mathrm{sgn}(\tau) \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\tau^{-1}\circ\sigma) A_{1,(\tau^{-1}\circ\sigma)(1)} A_{2,(\tau^{-1}\circ\sigma)(2)} \cdots A_{n,(\tau^{-1}\circ\sigma)(n)} = \mathrm{sgn}(\tau)\det(A). \end{aligned}$$

Hier hebben we eenvoudigweg de scalaire factoren in het product herschikt met behulp van τ^{-1}, en we hebben gebruikt dat $\mathrm{sgn}(\tau) = \mathrm{sgn}(\tau^{-1})$. Bovendien geldt dat als σ over alle mogelijke permutaties loopt, dan ook $\tau^{-1}\circ\sigma$ over alle mogelijke permutaties loopt. Dit toont aan dat de determinant een teken $\mathrm{sgn}(\tau)$ krijgt als we de rijen van de matrix permuteren volgens τ.
Als τ niet bestaat omdat $(i_1, \dots, i_n)$ geen permutatie is, dan vallen minstens twee van de i_k samen. In dat geval geeft

$$\epsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} A_{i_1 j_1} A_{i_2 j_2} \cdots A_{i_n j_n}$$

de determinant van een matrix waarin minstens twee rijen samenvallen. Door de antisymmetrie, bij het onderling verwisseling van rijen wijzigt de determinant van teken, ook wel de alternantie eigenschap genoemd, kan men concluderen dat de resulterende determinant nul moet zijn.
Deze twee gevallen kunnen compact worden gecombineerd door de notatie:

$$\det(A)\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}.$$

□

2.2 Determinant van matrix product (Theorem 2.19)

Gebruik bovenstaand resultaat om aan te tonen dat voor twee vierkante matrices $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ geldt dat:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

(Gebaseerd op *Theorem 2.19, werkcollege oef. 2.2.4*)

Bewijs. Neem de matrix $C = AB$, met elementen $C_{ij} = A_{ik}B_{kj}$, wordt de determinant bepaald via de Leibniz-formule:

$$\det(C) = \epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} C_{1i_1} C_{2i_2} \cdots C_{ni_n} = \epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} (A_{1j_1} B_{j_1 i_1})(A_{2j_2} B_{j_2 i_2}) \cdots (A_{nj_n} B_{j_n i_n}).$$

Dit kan herschreven worden als:

$$\det(C) = A_{1j_1} A_{2j_2} \cdots A_{nj_n} \epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} B_{j_1 i_1} B_{j_2 i_2} \cdots B_{j_n i_n}.$$

Laten we ons richten op het B-gedeelte van deze expressie. Als $(j_1, j_2, \ldots, j_n) = (1, 2, \ldots, n)$, dan is dit de determinant van B. Als bijvoorbeeld $(j_1, j_2, \ldots, j_n) = (2, 1, \ldots, n)$, dan kunnen we $i_1 \leftrightarrow i_2$ hernoemen, wat resulteert in:

$$\epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} B_{j_1 i_1} B_{j_2 i_2} \cdots B_{j_n i_n} = \epsilon_{i_2 i_1 \ldots i_n} B_{j_1 i_2} B_{j_2 i_1} \cdots B_{j_n i_n} = -\epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} B_{j_2 i_1} B_{j_1 i_2} \cdots B_{j_n i_n}.$$

Hier hebben we gebruik gemaakt van de eigenschap van het Levi-Civita-symbool, wat men net in voorgaand bewijs heeft aangetoond.

(*Intuïtief kan men deze eigenschap inzien doordat $\epsilon_{i_2 i_1 \ldots i_n} = -\epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n}$. In het algemeen kan voor elke volgorde $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ deze in de gewenste volgorde $(1, 2, \ldots, n)$ worden gebracht door de i-variabelen in de B's te hernoemen en vervolgens de i-variabelen in het Levi-Civita-symbool dienovereenkomstig te verwisselen. Dit proces resulteert in een overall teken, exact gegeven door $\epsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n}$.*)

Daarom geldt:

$$\begin{aligned}\det(C) &= A_{1j_1} A_{2j_2} \cdots A_{nj_n} \epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} B_{j_1 i_1} B_{j_2 i_2} \cdots B_{j_n i_n} \\ &= \epsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n} A_{1j_1} A_{2j_2} \cdots A_{nj_n} \epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} B_{1i_1} B_{2i_2} \cdots B_{ni_n}.\end{aligned}$$

En uiteindelijk:

$$\det(C) = \det(A)\det(B).$$

□

2.3 De formule van Jacobi (Proposition 2.24)

Gegeven een matrix $A(t) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ waarbij de elementen een functie zijn van een scalaire variabele t. Toon de formule van Jacobi aan, namelijk:

$$\frac{d}{dt}\det(A(t)) = \det(A(t))tr\left(A(t)^{-1}\frac{dA}{dt}(t)\right),$$

waarbij je kan gebruik maken van:

$$\sum_{l=1}^{n} A_{il}(-1)^{k-l}M_k^l = \det(A)\delta_{ik},$$

met hierin de cofactoren M_k^l die gerelateerd zijn aan de elementen van de geadjungeerde matrix als:

$$(\mathrm{adj}(A))_k^l = (-1)^{k-l}M_k^l.$$

(Gebaseerd op *Proposition 2.24*)

Bewijs. Eerst interpreteren we de determinant als zijnde een polynoom (zoals wordt aangetoond in de Laplace Expansie). Als we dan de afgeleide willen berekenen van de determinant, kunnen we simpelweg de kettingregel gebruiken als volgt:

$$\frac{d}{dt}\det(A(t)) = \sum_{i,j}\frac{\partial det(A)}{\partial A_{ij}}\frac{dA_{ij}}{dt}(t)$$

Vervolgens wordt de Laplace Expansie gebruikt om de eerste term ($\frac{\partial det(A)}{\partial A_{ij}}$) van de sommatie te kunnen vinden, hierbij wordt bij de tweede gelijkheid de definitie gebruikt van een adjunct:

$$\frac{\partial det(A)}{\partial A_{ij}} = (-1)^{i-j}M_{ji} = (adj(A))_{ji}$$

Dit gevonden resultaat wordt ingevuld in de originele vergelijking en de sommatie kan weggehaald worden doordat er een dubbele matrixvermenigvuldiging staat die neerkomt op het nemen van de som van de diagonaalelementen (er wordt dus eigenlijk een projectie op de diagonaal structuur van het matrix product uitgevoerd) zoals te zien is in de eerst volgende vergelijking.

$$(\mathrm{adj}(A)\cdot\frac{dA}{dt})_{jj} = \sum_i(\mathrm{adj}(A))_{ji}\cdot\frac{dA_{ij}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\det(A(t)) = \sum_{i,j}(adj(A))_{ji}\frac{dA_{ij}}{dt}(t) = tr\left(adj(A(t))\frac{dA}{dt}(t)\right)$$

Vervolgens kan de alternatieve definitie van de adjunct gebruikt worden die zegt dat: $det(A)A^{-1} = adj(A)$. Door deze gelijkheid te gebruiken, kan de adjunct vervangen worden, wat het gevraagde als eindantwoord heeft.

□

2.4 Multidimensionale Gaussische distributie (Example 2.19)

Gegeven de multidimensionale Gaussische distributie voor een stochastische variabele $X \in \mathbb{R}^n$, gegeven door:

$$f_X(x) = Z \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(x_i - \mu_i)A_{ij}(x_j - \mu_j)\right] = Z \exp\left[-\frac{1}{2}(x-\mu)^T A(x-\mu)\right],$$

waarbij $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ een symmetrische en positief-definiete matrix is, en $\mu \in \mathbb{R}^n$. De scalaire grootheid Z is een normalisatiefactor die gekozen moet worden zodat:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_X(x)\, d^n x = 1.$$

Geef een uitdrukking voor Z in termen van A (en indien nodig μ) zodat aan deze normalisatievoorwaarde is voldaan. Je mag gebruik maken van:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

(Gebasseerd op *Example 2.19*)

Bewijs.

$$f_X(x) = Z \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(x_i - \mu_i)A_{i,j}(x_j - \mu_j)\right] = Z \exp\left[-\frac{1}{2}(x-\mu)^\top A(x-\mu)\right]$$

De bedoeling is om Z te bepalen zodat de functie genormaliseerd is, we moeten dus aantonen dat $\int f_X(x)dx^n = 1$, men weet uit de opgave dat:

- A is een symetrische matrix $\Rightarrow A = A^T$
- x en μ zijn vectoren

Eerst wordt er een LDU-decompositie gedaan met L een lagere driehoeksmatrix (met enkel 1's op de diagonaal), U een bovendriehoeksmatrix en D een diagonaalmatrix. Dan is:

$$A = LDU = (LDU)^T = U^T(LD)^T = U^T DL^T \Rightarrow L = U^T \Rightarrow A = LDL^T$$

nu doen we een substitutie van $x = \mu + (L^T)^{-1}y$ met y de nieuwe variabele dit wordt dan:

$$\int f_X(x)dx^n = Z\int exp[-\frac{1}{2}(\mu + (L^T)^{-1}y - \mu)^T LDL^T(\mu + (L^T)^{-1}y - \mu)] \cdot |det(J)|dy^n$$

$$= Z\int exp[-\frac{1}{2}((L^T)^{-1}y)^T LDL^T(L^T)^{-1}y] \cdot |det(J)|dy^n$$

nu is $L^T(L^T)^{-1} = 1$

$$= Z\int exp[-\frac{1}{2}((L^T)^{-1}y)^T LDy] \cdot |det(J)|dy^n$$

Ook is $((L^T)^{-1}y)^T L = y^T L^{-1}L = y^T$

$$= Z\int exp[-\frac{1}{2}y^T Dy] \cdot |det(J)|dy^n$$

de elementen van de Jacobiaan zijn per definitie:

$$[J(y)]_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial y_j}$$

of dus in vector notatie:

$$[J(y)] = \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\partial(\mu + (L^T)^{-1}y)}{\partial y} = (L^T)^{-1}$$

nu is:

$$det(J(y)) = det((L^T)^{-1}) = det((L^{-1})^T)$$

en aangezien $det(B) = det(B^T)$ is:

$$det(J(y)) = det(L^{-1})$$

L is een onder driehoeksmatrix met allemaal 1 op de diagonaal. Dit is dan ook zo voor zijn inverse dus, aangezien $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$ en dus vindt men dat:

$$det(J(y)) = 1$$

als we dit invullen in de integraal krijgen we:

$$= Z \int exp[-\frac{1}{2}y^T Dy] \cdot dy^n$$

we schrijven nu $y^T Dy$ in zijn componenten:

$$y^T Dy = \sum_i (y^i)^2 d_i$$

en aangezien $a^{x+y} = a^x a^y$ is de integraal te schrijven als:

$$= Z \prod_i \int exp[-\frac{1}{2}(y^i)^2 d_i] \cdot dy^i$$

nu doen we een substitutie van $u^i = \sqrt{\frac{1}{2}d_i}y^i$ dit kan omdat $d_i > 0$, dan hebben we:

$$= Z \prod_i \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}d_i}} \int exp[-(u^i)^2] \cdot dy^i = Z \prod_i \sqrt{\frac{2\pi}{d_i}} = 1$$

dit moet gelijk aan 1 zijn zodat de functie f genormaliseerd is, nu is $\prod_i d_i = det(D)$ en wetend dat $\det(L) = \det(L^T) = 1$, dan krijgen we voor Z:

$$Z = \sqrt{\frac{\det(D)}{2\pi}} = \sqrt{\frac{\det(L)\det(D)\det(L^T)}{2\pi}} = \sqrt{\frac{\det(A)}{2\pi}}$$

□

opmerking: de elementen van D ($= d_i$) zijn geen eigenwaarden en

2.5 De momentgenererende functie (Example 2.20)

Gegeven de multidimensionale Gaussische distributie voor een stochastische variabele $X \in \mathbb{R}^n$ zoals hierboven bepaald met de correcte normalisatiefactor. Bepaal nu de momentgenererende functie:

$$M_X(t) = \langle e^{\sum_{i=1}^n t_i X_i} \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\sum_{i=1}^n t_i x_i} f_X(x)\, d^n x,$$

en daaruit de verwachtingswaarde en covariantiematrix:

$$\langle X_i \rangle = \left. \frac{\partial M_X}{\partial t_i} \right|_{t=0}, \quad \langle X_i X_j \rangle = \left. \frac{\partial^2 M_X}{\partial t_i \partial t_j} \right|_{t=0}.$$

(Gebaseerd op example 2.20)

Bewijs. We beginnen met het opstellen van de momentgenererende functie:

$$M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\sum_{i=1}^n t_i x_i} Z \exp\left[-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \mathbf{A} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right] d^n \mathbf{x}$$

Deze werken we verder uit volgens gekende formules, de som schrijven we als een vectorproduct, we brengen de constante factoren buiten de integraal en herschrijven de integraal op een zodanige manier dat het terug de vorm krijgt van de genormaliseerde integraal waarvan we weten dat deze gelijk is aan 1:

$$\begin{aligned}
M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) &= Z \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left[\mathbf{t}^{\mathbf{T}} \mathbf{x} - \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \mathbf{A} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right] d^n \mathbf{x} \\
&= Z \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left[\frac{1}{2} \mathbf{t}^{\mathbf{T}} A^{-1} \mathbf{t} + \mathbf{t}^{\mathbf{T}} \mu - \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu} - A^{-1}\mathbf{t})^\top \mathbf{A} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu} - A^{-1}\mathbf{t}) \right] d^n \mathbf{x} \\
&= \exp\left[\frac{1}{2} \mathbf{t}^{\mathbf{T}} A^{-1} \mathbf{t} + \mathbf{t}^{\mathbf{T}} \mu \right] Z \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left[-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu} - A^{-1}\mathbf{t})^\top \mathbf{A} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu} - A^{-1}\mathbf{t}) \right] d^n \mathbf{x} \\
&= \exp\left[\frac{1}{2} \mathbf{t}^{\mathbf{T}} A^{-1} \mathbf{t} + \mathbf{t}^{\mathbf{T}} \mu \right]
\end{aligned}$$

In de laatste stap hebben we gebruik gemaakt van het feit dat de integraal $Z \int_{\mathbb{R}^n} f_X(x) = 1$ is en dat een verschuiving met een constante factor $A^{-1}t$ geen verandering van de waarde van de integraal meebrengt. Om vervolgens de verwachtingswaarde $\langle X_i \rangle$ te bepalen, nemen we de partiële afgeleide van $M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})$ naar t_i:

$$\frac{\partial M_{\mathbf{X}}}{\partial t_i} = \frac{\partial}{\partial t_i} \exp\left[\frac{1}{2} \mathbf{t}^\top \mathbf{A}^{-1} \mathbf{t} + \mathbf{t}^\top \boldsymbol{\mu} \right].$$

Via gebruik van de kettingregel vinden we dat:

$$\frac{\partial M_{\mathbf{X}}}{\partial t_i} = M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) \cdot \left[\frac{\partial}{\partial t_i} \left(\frac{1}{2} \mathbf{t}^\top \mathbf{A}^{-1} \mathbf{t} + \mathbf{t}^\top \boldsymbol{\mu} \right) \right].$$

Met als afgeleide van de exponent:

$$\frac{\partial}{\partial t_i} \left(\frac{1}{2} \mathbf{t}^\top \mathbf{A}^{-1} \mathbf{t} \right) = \sum_j A_{ij}^{-1} t_j, \quad \frac{\partial}{\partial t_i} \left(\mathbf{t}^\top \boldsymbol{\mu} \right) = \mu_i.$$

Hieruit volgt dat:

$$\frac{\partial M_{\mathbf{X}}}{\partial t_i} = M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) \cdot \left[\sum_j A_{ij}^{-1} t_j + \mu_i\right].$$

Deze wordt dan vervolgens geëvalueerd bij $\mathbf{t} = 0$:

$$\langle X_i \rangle = \left.\frac{\partial M_{\mathbf{X}}}{\partial t_i}\right|_{\mathbf{t}=0} = \mu_i.$$

Wat ons de verwachtingswaarde geeft. Nu wordt tot slot de covariantiematrix berekend, de covariantiematrix; $Cov(\mathbf{X})$ heeft als elementen:

$$(Cov(\mathbf{X}))_{ij} = cov(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j) = \langle \mathbf{X}_i \mathbf{X}_j \rangle - \langle \mathbf{X}_i \rangle \langle \mathbf{X}_j \rangle$$

eerst berekenen we $\langle \mathbf{X}_i \mathbf{X}_j \rangle$

$$\langle X_i X_j \rangle = \left.\frac{\partial^2 M_{\mathbf{X}}}{\partial t_i \partial t_j}\right|_{\mathbf{t}=0}.$$

Neem opnieuw de partiële afgeleide van $\frac{\partial M_{\mathbf{X}}}{\partial t_i}$:

$$\frac{\partial^2 M_{\mathbf{X}}}{\partial t_i \partial t_j} = \frac{\partial}{\partial t_j}\left[M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) \cdot \left(\sum_k A_{ik}^{-1} t_k + \mu_i\right)\right].$$

Gebruik de productregel:

$$\frac{\partial^2 M_{\mathbf{X}}}{\partial t_i \partial t_j} = \frac{\partial M_{\mathbf{X}}}{\partial t_j} \cdot \left(\sum_k A_{ik}^{-1} t_k + \mu_i\right) + M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) \cdot \frac{\partial}{\partial t_j}\left(\sum_k A_{ik}^{-1} t_k + \mu_i\right).$$

$$= \left(\sum_s A_{js}^{-1} t_s + \mu_j\right) \cdot \left(\sum_k A_{ik}^{-1} t_k + \mu_i\right) + M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) \cdot \frac{\partial}{\partial t_j}\left(\sum_k A_{ik}^{-1} t_k + \mu_i\right)$$

De eerste term wordt $\mu_i \mu_j$ bij $\mathbf{t} = 0$, want $\sum_s A_{js}^{-1} t_s \to 0$ en $\sum_k A_{ik}^{-1} t_k \to 0$. De tweede term wordt:

$$\frac{\partial}{\partial t_j}\left(\sum_k A_{ik}^{-1} t_k + \mu_i\right) = A_{ij}^{-1}.$$

Daarom:

$$\langle X_i X_j \rangle = \mu_i \mu_j + \left. M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) \cdot A_{ij}^{-1}\right|_{\mathbf{t}=0}.$$

Bij $\mathbf{t} = 0$ wordt $M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = 1$, dus:

$$\langle X_i X_j \rangle = \mu_i \mu_j + A_{ij}^{-1}.$$

De covariantie is dan:

$$Cov(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j) = \langle \mathbf{X}_i \mathbf{X}_j \rangle - \langle \mathbf{X}_i \rangle \langle \mathbf{X}_j \rangle = \mu_i \mu_j + A_{ij}^{-1} - \mu_i \mu_j = A_{ij}^{-1}$$

De covariantiematrix is dan:

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{X}) = \mathbf{A}^{-1}.$$

□

2.6 De blok-LDU ontbinding (Section 2.8.2)

Verifieer de blok-LDU ontbinding:

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} I_{n_1} & O \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I_{n_2} \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} I_{n_1} & A_{11}^{-1}A_{12} \\ O & I_{n_2} \end{bmatrix}}_{U},$$

door deze uitdrukking expliciet uit te werken en dus de blokmatrices te vermenigvuldigen. Gebruik vervolgens dit resultaat om een uitdrukking af te leiden voor $\det(A)$**.**
(Gebasserd op *Section 2.8.2*)

Bewijs. Eerste wordt de uitdrukking expliciet uitgewerkt om het gevraagde na te gaan.

$$\begin{aligned}
A &= \underbrace{\begin{bmatrix} I_{n_1} & O \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I_{n_2} \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} I_{n_1} & A_{11}^{-1}A_{12} \\ O & I_{n_2} \end{bmatrix}}_{U} \\
&= \underbrace{\begin{bmatrix} I_{n_1}A_{11} + O & I_{n_1}O + O(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}) \\ A_{21}A_{11}^{-1}A_{11} + I_{n_2}O & A_{21}A_{11}^{-1}O + I_{n_2}(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}) \end{bmatrix}}_{LD} \underbrace{\begin{bmatrix} I_{n_1} & A_{11}^{-1}A_{12} \\ O & I_{n_2} \end{bmatrix}}_{U} \\
&= \underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & O \\ A_{21} & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}}_{LD} \underbrace{\begin{bmatrix} I_{n_1} & A_{11}^{-1}A_{12} \\ O & I_{n_2} \end{bmatrix}}_{U} \\
&= \underbrace{\begin{bmatrix} A_{11}I_{n_1} + O & A_{11}A_{11}^{-1}A_{12} + OI_{n_1} \\ A_{21}I_{n_1} + (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})O & A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} + (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})I_{n_2} \end{bmatrix}}_{LDU} \\
&= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

voor een blok matrix zoals A wordt het Schur compliment van A_{11} dan gedefinieerd als $(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})$. Dit wordt ook soms herschreven als A/A_{11}.

De $\det(A)$ kan nu ook via de LDU-matrix berekend worden.

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det(LDU) \\
&= \det(L)\det(D)\det(U) \\
&= 1 \cdot det(D) \cdot 1 \\
&= det(A_{11}) \cdot det(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}) \\
&= det(A_{11}) \cdot det(A/A_{11}) \\
&= det(A_{22}) \cdot det(A/A_{22})
\end{aligned}$$

□

2.7 Blokmatrixgedaante van A^{-1} (Section 2.8.2)

Gebruik de blok-LDU ontbinding uit de vorige vraag om een uitdrukking af te leiden voor de blokken in de blokmatrixgedaante van A^{-1}.
(Gebaseerd op *Section 2.8.2*)

Bewijs. De inverse van A kan afgeleid worden uit de blok-LDU ontbinding. Dit gebeurt als volgt (zelfde matrixen van 2.6):

Eerst worden L^{-1}, D^{-1} en U^{-1} bepaald. Deze zijn erg gemakkelijk met dat D een diagonale matrix is, en de determinanten van L en U gelijk zijn aan 1.

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} I_{n_1} & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ O & I_{n_2} \end{bmatrix}, \quad D^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & O \\ O & (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \end{bmatrix}, \quad L^{-1} = \begin{bmatrix} I_{n_1} & O \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I_{n_2} \end{bmatrix}.$$

Nu is A^{-1} 'makkelijk' te berekenen.

$$\begin{aligned}
A^{-1} =& U^{-1}D^{-1}L^{-1} \\
=& \begin{bmatrix} I_{n_1} & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ O & I_{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & O \\ O & (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n_1} & O \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I_{n_2} \end{bmatrix} \\
=& \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \\ O & (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n_1} & O \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I_{n_2} \end{bmatrix} \\
=& \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \\ -(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

□

2.8 De Marginale distributie van variabele X_2 (Example 2.21)

Beschouw de multidimensionale Gaussische distributie voor een verzameling stochastische variabelen $X = X_1 \oplus X_2$, die dus bestaat uit twee groepen $X_1 = (X_1^1, \ldots, X_1^{n_1})$ en $X_2 = (X_2^1, \ldots, X_2^{n_2})$. Voor de eenvoud kiezen we het gemiddelde nul, zodat de distributie is gegeven door:

$$f_X(x_1, x_2) = \sqrt{\frac{\det(A)}{(2\pi)^n}} \exp\left(-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right).$$

Gebruik makend van bovenstaande blok-LDU ontbinding, bereken de marginale distributie van de variabele X_2, gegeven door:

$$f_{X_2}(x_2) = \int_{\mathbb{R}^{n_1}} f_X(x_1, x_2)\, d^{n_1} x_1.$$

(Gebaseerd op *Example 2.21*)

Bewijs. We gebruiken $U = L^T$ om een substitutie $y = Ux$ of $x = U^{-1}y$ in te voeren. Deze transformatie transformeert de variabele $x_2 = y_2$ niet, maar substitueert de huidige integratie variabelen:

$$x_1 = y_1 - A_{11}^{-1} A_{12} y_2 = y_1 - A_{11}^{-1} A_{12} x_2$$

Dus wordt de integraal:

$$f_{X_2}(x_2) = \sqrt{\frac{det(A)}{(2\pi)^n}} \int_{\mathbb{R}^{n_1}} exp\left[\frac{-1}{2}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right] d^{n_1} x_1$$

Als we de matrixvermenigvuldiging doen voor het argument van de exponentiële, krijgen we:

$$x_1^T A_{11} x_1 + x_1^T A12 x_2 + x_2^T A_{21} x_2 + x_2^T A_{22} x_2$$

Hiervoor werd gebruikt dat $A_{12}^T = A_{21}$ omdat A symmetrisch is. Nu kunnen we y_1 substitueren en wordt deze vergelijking:

$$y_1^T A_{11} y_1 + x_2^T (A/A_{11}) x_2$$

Hier is A/A_{11} het Schurcomplement. We kunnen ook $d^{n_1} x_1$ vervangen door $d^{n_1} y_1$ We implementeren ook dat det(A) = det(A_{11})det(A/A_{11}). We brengen dit weer in de integraal:

$$f_{X_2}(x_2) = \sqrt{\frac{det(A_{11}) det(A/A_{11})}{(2\pi)^{n_1+n_2}}} exp\left[\frac{-1}{2} x_2^T (A/A_{11}) x_2\right] \int_{\mathbb{R}^{n_1}} exp\left[\frac{-1}{2} y_1^T A_{11} y_1\right] d^{n_1} y_1$$

De overige integraal is ook een Gaussisch en is dus gelijk aan:

$$\int_{\mathbb{R}^{n_1}} exp\left[\frac{-1}{2} y_1^T A_{11} y_1\right] d^{n_1} y_1 = \sqrt{\frac{(2\pi)^{n_1}}{det(A_{11})}}$$

Dus:

$$f_{X_2}(x_2) = \sqrt{\frac{det(A/A_{11})}{(2\pi)^{n_2}}} exp\left[[\frac{-1}{2} x_2^T (A/A_{11}) x_2\right]$$

De marginale distributie is dus ook een Gaussische distributie beschreven door het Schurcomplement. □

2.9 Inversielemma van Woodbury (Proposition 2.30)

Toon het inversielemma van Woodbury:

$$(A+UCV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(C^{-1}+VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1},$$

door beide leden te vermenigvuldigen met $(A+UCV)$ en aan te tonen dat je inderdaad een gelijkheid krijgt. org ervoor dat alle stappen en de wiskunde die je erin of ertussen gebruikt duidelijk zijn en goed zijn toegelicht.
(Gebaseerd op *Proposition 2.30*)

Bewijs. Om de Woodbury matrix identiteit te bewijzen door zowel het linker- als rechterlid, links te vermenigvuldigen met $(A+UCV)$ en aan te tonen dat dit de identiteits matrix geeft.

Men kreeg voor het linkerlid:

$$(A+UCV)(A+UCV)^{-1} = I \tag{1}$$

Men kreeg voor het rechterlid (met matrixvermenigvuldiging, associativiteit en distributiviteit):

$$\begin{aligned}
&(A+UCV)(A^{-1} - A^{-1}U(C^{-1}+VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}\\
&= AA^{-1} - AA^{-1}U(C^{-1}+VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1} + UCVA^{-1} - UCVA^{-1}U(C^{-1}+V^{-1}A^{-1}U)^{-1}VA^{-1}\\
&= I - IU(C^{-1}+VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1} + UCVA^{-1} - UCVA^{-1}U(C^{-1}+V^{-1}A^{-1}U)^{-1}VA^{-1}\\
&= I - U(C^{-1}+VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1} + UCVA^{-1} - UCVA^{-1}U(C^{-1}+V^{-1}A^{-1}U)^{-1}VA^{-1}\\
&= (I+UCVA^{-1}) - (U(C^{-1}+VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1} + UCVA^{-1}U(C^{-1}+V^{-1}A^{-1}U)^{-1}VA^{-1})\\
&= (I+UCVA^{-1}) - ((U+UCVA^{-1}U)(C^{-1}+VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1})\\
&= (I+UCVA^{-1}) - UC(C^{-1}+VA^{-1}U)(C^{-1}+VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}\\
&= I + UCVA^{-1} - UCVA^{-1}\\
&= I.
\end{aligned} \tag{2}$$

Uit (2) en (3) volgt de matrix identiteit van Woodbury:

$$(A+UCV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(C^{-1}+VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1} \tag{3}$$

□

2.10 Reeks-expansie van een inverse matrix som (Remark 2.68)

Gebruik het inversielemma van Woodbury uit de vorige vraag om aan te tonen dat:

$$(A+B)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-A^{-1}B)^k A^{-1}.$$

(Gebaseerd op *Remark 2.68*)

Bewijs. Begin vanuit **linkerlid**: $(A+B)^{-1}$ en pas hierop het **inversielemma van Woodbury** toe, waarbij $C = B$ (B $\in \mathbb{F}^{n\times n}$) en $U = V = I_n$ worden gekozen (allen vierkante matrices). Dan volgt:

$$\begin{aligned}
(A+B)^{-1} =& A^{-1} - A^{-1}(B^{-1} + A^{-1})^{-1}A^{-1} \\
=& A^{-1} - A^{-1}(A \cdot (B^{-1} + A^{-1}))^{-1} \\
=& A^{-1} - A^{-1}(AB^{-1} + I)^{-1} \\
=& A^{-1} - A^{-1}((A+B) \cdot B^{-1})^{-1} \\
=& A^{-1} - A^{-1}B(A+B)^{-1}
\end{aligned}$$

We kunnen dan de recursieve structuur gebruiken

$$\begin{aligned}
(A+B)^{-1} =& A^{-1} - A^{-1}B\left(A^{-1} - A^{-1}B\left(A^{-1} - A^{-1}B\,(...)\right)\right) \\
=& A^{-1} - A^{-1}BA^{-1} + (A^{-1}B)^2A^{-1} - (A^{-1}B)^3A^{-1} + ...
\end{aligned}$$

Om de volgende reeks op te stellen

$$(A+B)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-A^{-1}B)^k A^{-1} \tag{2.73}$$

□

2.11 De afgeleide van de inverse matrix A^{-1} (Remark 2.68)

Gegeven een inverteerbare matrix $A(x)$, waarvan de elementen een functie zijn van de scalaire variabele x. Zoek een uitdrukking voor de afgeleide van de inverse matrix, i.e.:

$$\frac{dA^{-1}(x)}{dx},$$

op basis van $A^{-1}(x)$ en $\frac{dA(x)}{dx}$. Je mag hierbij de expansie uit de vorige vraag gebruiken.
(Gebaseerd op *Remark 2.68*)

Bewijs. Als we een één-parameterfamilie van inverteerbare matrices $A(x)$ hebben, kunnen we $A(x+\epsilon)$ uitbreiden via **Taylor-ontwikkeling** als

$$A(x+\varepsilon) = A(x) + \varepsilon \frac{dA}{dx}(x) + O(\varepsilon^2),$$

$$\Downarrow$$

$$(A(x+\varepsilon))^{-1} \simeq \left(A(x) + \varepsilon \frac{dA}{dx}(x)\right)^{-1}$$

Substitueert men dan vervolgens $A \to A(x)$ en $B \to \varepsilon \frac{dA}{dx}(x)$ en vult dit in, in de expansie uit vorige vraag, $(A+B)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-A^{-1}B)^k A^{-1}$, dan volgt:

$$\begin{aligned}
(A(x+\varepsilon))^{-1} &\simeq \left(A(x) + \varepsilon \frac{dA}{dx}(x)\right)^{-1} \\
&\overset{(\mathbf{2.73})}{=} A^{-1}(x) - A^{-1}(x)\varepsilon \frac{dA}{dx}(x) \left(A(x) + \varepsilon \frac{dA}{dx}(x)\right)^{-1} \\
\Leftrightarrow \quad \frac{(A(x+\varepsilon))^{-1} - A^{-1}(x)}{\varepsilon} &= -A^{-1}(x) \frac{dA}{dx}(x) \left(A(x) + \varepsilon \frac{dA}{dx}(x)\right)^{-1}
\end{aligned}$$

Neem de limiet $\lim_{\varepsilon \to 0}$ van beide leden.

$$\frac{dA^{-1}}{dx}(x) = -A^{-1}(x) \frac{dA}{dx}(x) A^{-1}(x),$$

Dit resultaat volgt ook direct door de afgeleide te nemen (kettingregel) van de definitievergelijking

$$A(x)A^{-1}(x) = I.$$

Merk op dat dit het scalair resultaat generaliseert

$$\frac{d}{dx} f(x)^{-1} = -\frac{1}{f(x)^2}\left(\frac{d}{dx} f(x)\right),$$

op een manier die vereist rekening te houden met het feit dat $A(x)$ en $\frac{dA}{dx}(x)$ mogelijk niet commuteren. $\square$

3 Lineaire Operatoren

3.1 Directe som decompositie voor een projectie operator, $\hat{P}$ (Proposition 3.3)

Gegeven een vectorruimte V en een lineaire operator $\hat{P} \in \mathbf{End}(V)$ die voldoet aan $\hat{P}^2 = \hat{P}$. Toon aan dat $V = \mathbf{im}(\hat{P}) \oplus \ker(\hat{P})$.
(Gebaseerd op *Proposition 3.3*)

Bewijs. De operator $\hat{P}$ is idempotent, dus geldt: $\hat{P}^2 = \hat{P}$.
Elke $\vec{v} \in V$ kan geschreven worden als:

$$\vec{v} = \hat{P}\vec{v} + (\hat{1} - \hat{P})\vec{v}$$

Nu gebruiken we dat:

$$\vec{v}_1 = \hat{P}\vec{v} \;\text{ en }\; \vec{v}_2 = (\hat{1} - \hat{P})\vec{v}$$

Dus:

$$\hat{P}\vec{v}_1 = \hat{P}(\hat{P}\vec{v}) = \hat{P}^2\vec{v} = \hat{P}\vec{v} \implies \vec{v}_1 \in im(\hat{P})$$
$$\hat{P}\vec{v}_2 = \hat{P}(1 - \hat{P})\vec{v} = (\hat{P} - \hat{P}^2)\vec{v} = 0 \implies \vec{v}_2 \in ker(\hat{P})$$

Hieruit hebben we dus aangetoond dat $V = im(\hat{P}) + ker(\hat{P})$.

Nu gaan we na dat $im(\hat{P}) \cap ker(\hat{P}) = \{\vec{0}\}$. Stel $\vec{w} \in im(\hat{P}) \cap ker(\hat{P})$.

1) $\vec{w} \in im(\hat{P})$:
   $\implies$ Er bestaat een $\vec{u} \in V$ zodat $\vec{w}$ kan geschreven worden als $\vec{w} = \hat{P}\vec{u}$. Dan volgt dat $\hat{P}\vec{w} = \hat{P}^2\vec{u} = \hat{P}\vec{u} = \vec{w}$.

$$\hat{P}\vec{w} = \vec{w}$$

2) $\vec{w} \in ker(\hat{P})$: $\implies$ Dan geldt: $\hat{P}\vec{w} = \vec{0}$.

Er volgt dus dat voor willekeurige $\vec{w} \in im(\hat{P}) \cap ker(\hat{P})$ geldt dat

$$\vec{w} = \hat{P}\vec{w} = \vec{0}$$

en dus dat $im(\hat{P}) \cap ker(\hat{P}) = \{\vec{0}\} \implies V = im(\hat{P}) \oplus ker(\hat{P})$ □

3.2 Eigenschap van een eigenwaarde, λ, van een operator, $\hat{A}$ (Proposition 3.5.)

Gegeven een lineaire operator $\hat{A} \in$ End(V) en een eigenvector v met eigenwaarde λ, zodat $\hat{A}v = \lambda v$. Toon in detail aan dat, gegeven een veelterm $p(z) \in \mathbb{F}[z]$, er geldt dat $p(\hat{A})v = p(\lambda)v$.
(Gebaseerd op *Proposition 3.5*)

Bewijs. Voor mononomen $p(x) = x^k$ is dit triviaal omdat we duidelijk kunnen zien dat:

$$\begin{aligned} p(\hat{A})\vec{v} &= \hat{A}^k\vec{v} \\ &= (\hat{A} \circ \hat{A} \circ \cdots \circ \hat{A})\vec{v} \\ &= (\hat{A}(\hat{A}(\cdots \hat{A}(\hat{A}\vec{v}) = (\hat{A}(\hat{A}(\cdots \hat{A}(\lambda\vec{v}) \\ &= \lambda^k\vec{v} \\ &= p(\lambda)\vec{v} \end{aligned} \tag{4}$$

Voor het meer algemene geval moeten we lineaire combinaties nemen van deze mononomen:

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k \tag{5}$$

We zien dan door 4 en 5 te combineren:

$$p(\hat{A})\vec{v} = \sum_{k=0}^{n} \hat{A}^k\vec{v} = \sum_{k=0}^{n} \lambda^k\vec{v} = p(\lambda)\vec{v}$$

□

3.3 Lineaire onafhankelijkheid van verzameling eigenvectoren (Proposition 3.7)

Gegeven een lineaire operator $\hat{A} \in$ End(V) en een verzameling eigenvectoren $S = \{v_i; i = 1, \ldots, k\}$ met bijbehorende eigenwaarden $\{\lambda_i; i = 1, \ldots, k\}$ die onderling allemaal verschillen ($\lambda_i \neq \lambda_j$ voor alle $i \neq j$). Toon aan dat de verzameling S lineair onafhankelijk is. (Gebaseerd op *Proposition 3.7*)

Bewijs. Beschouw een lineaire combinatie dat de nulvector geeft:

$$a^1 v_1 + a^2 v_2 + ... + a^k v_k = 0$$

Als we de polynoom $\prod_{j=1, j\neq i}^{k} (\hat{A} - \lambda_j)$ toepassen op deze vergelijking, dan schrappen alle termen behalve de i-de term dat $\prod_{j=1, j\neq i}^{k} (\lambda_i - \lambda_j) a^i v_i = 0$ wordt. Omdat de eerste factor niet nul is voor onderling verschillende eigenwaardes en $v_i \neq 0$, volgt dat $a_i = 0$. Dit kan gedaan worden voor alle i=1,...,k, zodat de enige oplossing $a^1 = a^2 = ... = a^k = 0$ is, dus impliceert dit dat de verzameling lineair onafhankelijk is. □

3.4 Eigenwaarde, λ, van $\hat{A}\hat{B}$, ook eigenwaarde bij $\hat{B}\hat{A}$ (Proposition 3.10)

Gegeven twee vectorruimten V en W en lineaire afbeeldingen $\hat{A} \in \mathbf{Hom}(V, W)$ en $\hat{B} \in \mathbf{Hom}(W, V)$. Toon aan dat elke niet-nul eigenwaarde $\lambda \neq 0$ van $\hat{B}\hat{A} \in \mathbf{End}(V)$ ook een eigenwaarde is van $\hat{A}\hat{B} \in \mathbf{End}(W)$. Toon ook aan dat de bijbehorende eigenruimten V_λ voor $\hat{B}\hat{A}$ en W_λ voor $\hat{A}\hat{B}$ voldoen aan $W_\lambda = \hat{A}V_\lambda$ en $\dim(V_\lambda) = \dim(W_\lambda)$, zodat de eigenwaarde $\lambda \neq 0$ dezelfde geometrische multipliciteit heeft voor beide operatoren. (Gebaseerd op *Proposition 3.10*)

Bewijs. V_λ is de eigenruimte bij eigenwaarde λ van de lineaire functie $\hat{A}\hat{B} : V \to V$. De notatie $\hat{A}V_\lambda$ komt overeen met de ruimte $\mathrm{im}(\hat{A}|_{V_\lambda}) = \{\hat{A}v; \quad \forall v \in V_\lambda\}$, waarbij $\hat{A}|_{V_\lambda}$ de restrictie van $\hat{A}$ tot V_λ is.
Er geldt dat $\hat{B}\hat{A}v = \lambda v$, voor alle $v \in V_\lambda$. Een willekeurige vector $w \in \hat{A}V_\lambda$ kan geschreven worden als $w = \hat{A}v$.
Hieruit volgt:

$$\hat{A}\hat{B}w = \hat{A}\hat{B}\hat{A}v = \hat{A}(\lambda v) = \lambda w.$$

$\implies$ λ is dus ook een eigenwaarde van $\hat{A}\hat{B} : W \to W$ bij een zekere eigenruimte $W_\lambda = \ker(\hat{A}\hat{B} - \lambda)$. De vector w kwam uit de ruimte $\hat{A}V_\lambda$ en daarom is $\hat{A}V_\lambda \leq W_\lambda$ en dus ook $\dim(\hat{A}V_\lambda) \leq \dim(W_\lambda)$.
Er geldt dat $\hat{A}|_{V_\lambda}$ een injectieve afbeelding naar W_λ is. Als dit niet het geval zou zijn, zou er een niet-nul vector $v \in V_\lambda$ bestaan zodanig dat $\hat{A}v = 0$. Maar dan kunnen we niet hebben dat $\hat{B}\hat{A}v = \lambda v$ voor een **niet-nul** λ. (Dit is het punt waar $\lambda \neq 0$ belangrijk is!).
$\hat{A}|_{V_\lambda}$ injectief $\implies \dim(V_\lambda) = \dim(\hat{A}V_\lambda) \leq \dim(W_\lambda)$.
Ook $\hat{B}|_{W_\lambda}$ is een injectieve afbeelding naar V_λ. Dit volgt direct door de rollen van $\hat{A}$ en $\hat{B}$ om te draaien. Hieruit volgt dat:
$\implies \dim(W_\lambda) = \dim(\hat{B}W_\lambda) \leq \dim(V_\lambda)$
Of anders gezegd: $\lambda^{-1}\hat{B}|_{W_\lambda}$ handelt als de inverse van $\hat{A}|_{V_\lambda}$, aangezien inderdaad

$$(\lambda^{-1}\hat{B} \circ \hat{A})v = v, \quad \forall v \in V_\lambda,$$

$$(\hat{A} \circ (\lambda^{-1}\hat{B}))w = w, \quad \forall w \in W_\lambda.$$

Daarom zijn V_λ en W_λ isomorf en geldt dat $\dim(V_\lambda) = \dim(W_\lambda)$. $\square$

3.5 Monische veelterm en zijn compangion matrix (Proposition 3.11)

Gegeven een monische polynoom $p(z) = z^n + p_{n-1}z^{n-1} + \cdots + p_1 z + p_0$ en een geassocieerde "companion matrix"

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -p_0 & -p_1 & -p_2 & \cdots & -p_{n-2} & -p_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Schrijf de verschillende rijen van de eigenwaardevergelijking $Cv = \lambda v$ uit. Als we een kandidaat eigenvector v zo normaliseren dat zijn eerste component voldoet aan $v_1 = 1$, hoe moeten de andere componenten v_k voor $k = 2, \ldots, n$ worden gekozen, en aan welke vergelijking moet λ voldoen, opdat de eigenwaardevergelijking voldaan zou zijn? (Gebaseerd op *Proposition 3.11*)

Bewijs. We starten van een monische polynoom p(z) en zijn geassocieerde companion matrix C. Vervolgens werken we de respectievelijke eigenwaardevergelijking uit:

$$\begin{aligned} & C\vec{\boldsymbol{v}} = \lambda\vec{\boldsymbol{v}} \\ \Leftrightarrow & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -p_0 & -p_1 & -p_2 & \cdots & -p_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \\ \lambda v_3 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ \vdots \\ -p_0 v_1 - p_1 v_2 - \cdots - p_{n-1} v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \\ \lambda v_3 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{6}$$

We kunnen dit nu schrijven als een stelsel van n vergelijkingen:

$$\begin{cases} v_2 = \lambda v_1 \\ v_3 = \lambda v_2 \\ \vdots \\ v_n = \lambda v_{n-1} \\ -p_0 v_1 - p_1 v_2 - \cdots - p_{n-1} v_n = \lambda v_n \end{cases} \tag{7}$$

Vervolgens gaan we een kandidaat eigenvector $\vec{\boldsymbol{v}}$ zo normaliseren dat voor zijn eerste component geldt dat $v_1 = 1$. Als we deze normalisatie voorwaarde toepassen op de vorige uitdrukking krijgen we:

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \begin{cases} v_2 = \lambda \\ v_3 = \lambda^2 \\ \vdots \\ v_n = \lambda^{n-1} \\ -p_0 - p_1\lambda - \cdots - p_{n-1}\lambda^{n-1} = \lambda \cdot \lambda^{n-1} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} v_2 = \lambda \\ v_3 = \lambda^2 \\ \vdots \\ v_n = \lambda^{n-1} \\ -p_0 - p_1\lambda - \cdots - p_{n-1}\lambda^{n-1} = \lambda^n \end{cases}
\end{aligned} \tag{8}
$$

Hieruit kunnen we twee conclusies trekken. Ten eerste hebben de componenten van de vector $\vec{\boldsymbol{v}}$ de volgende waarden:

$$
v_k = \lambda^{k-1}, k \in [1, 2, 3, \ldots, n] \tag{9}
$$

En ten tweede voldoet de eigenwaarde λ aan de volgende vergelijking:

$$
\begin{aligned}
&- p_0 - p_1\lambda - \cdots - p_{n-1}\lambda^{n-1} - \lambda^n = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + p_2\lambda^2 + p_1\lambda + p_0 = 0 \\
&\Leftrightarrow p(\lambda) = 0
\end{aligned} \tag{10}
$$

We zien dus dat de eigenwaarden van de companion matrix C de nulpunten zijn van de monische polynoom p(z). Dit toont ook aan dat p(λ) de karakteristieke polynoom van C is. $\square$

3.6 Stelling van Calyley-Hamilton (Theorem 3.12)

Gegeven een vierkante matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ en zijn karakteristieke veelterm $k_A(z) = \det(zI - A)$. Bewijs de stelling van Cayley-Hamilton, namelijk dat $k_A(A) = O$. Hierbij kan je gebruikmaken van de bekende relatie dat voor elke vierkante matrix geldt dat $B\,\mathbf{adj}(B) = \det(B)I$ met $\mathbf{adj}(B)$ de geadjugeerde matrix van B. (Gebaseerd op *Theorem 3.12*)

Bewijs. We kiezen voor $\hat{A}$ een basis en dus een matrixrepresentatie A en vervolgens kunnen we definiëren:

$$T(z) = zI - A \tag{11}$$

Met elementen:

$$T^i_j(z) = z\delta^i_j - A_{ij} \tag{12}$$

Vervolgens definiëren we $S(z)$ als de geadjugeerde van $T(z)$:

$$S(z) = adj(T(z)) \tag{13}$$

Nu kan men met de gegeven betrekking de volgende uitwerking verkrijgen:

$$\begin{aligned} T(z)S(z) &= T(z)adj(T(z)) = \det(T(z))I \\ &= det(zI - A)I = k_{\hat{A}}(z)I \end{aligned} \tag{14}$$

Vervolgens splitsen we dit in componenten:

$$\begin{aligned} T(z)^i_j S(z)^j_k &= (zI - A)^i_j S(z)^j_k \\ &= (z\delta^i_j - A_{ij})S(z)^j_k \\ &= k_{\hat{A}}(z)\delta^i_k, \forall i, k = 1, ..., n \end{aligned} \tag{15}$$

We merken op dat de componenten $S(z)^j_k$ polynomen zijn van een maximale graad $n - 1$. Omdat zowel linker- als rechterlid van de vorige componentgewijze vergelijking 15 polynomen zijn over $\mathbb{F}[z]$ kunnen we ze evalueren met betrekking tot $\hat{A}$. Als we $T(z)$ evalueren in $\hat{A}$ krijgen we met de matrixvoorstelling:

$$T^i_j(A) = A\delta^i_j - A_{ij} \tag{16}$$

Nu kunnen we beide leden vermenigvuldigen met e_i:

$$\begin{aligned} T^i_j(A)e_i &= A\delta^i_j e_i - A_{ij}e_i \\ &= Ae_j - A_{ij}e_i = \vec{0} \end{aligned} \tag{17}$$

Nu gebruiken we 17 op de componentgewijze vergelijking 15 na beide leden opnieuw te vermenigvuldigen met e_i:

$$\begin{aligned} k_{\hat{A}}(A)\delta^i_k e_i = k_{\hat{A}}(A)e_k &= T(A)^i_j S(A)^j_k e_i \\ &= S(A)^j_k T(A)^i_j e_i \\ &= S(A)^j_k (T(A)^i_j e_i) \\ &= \vec{0}, \forall i, k = 1, ..., n \end{aligned} \tag{18}$$

Door vervolgens te sommeren over i = 1,..., n vinden we dat $k_{\hat{A}}(A)e_k = \vec{0}$. Dit impliceert ten slotte dat $k_{\hat{A}}(A) = O$ en $k_{\hat{A}}(\hat{A}) = \hat{0}$ omdat we deze stappen basisonafhankelijk hebben opgesteld (er werd gebruik gemaakt van een willekeurige basis). □

3.7 Spectrale decompositie van operator, $\hat{A}$ (Theorem 3.16)

Gegeven een vectorruimte V en twee diagonaliseerbare operatoren $\hat{A}, \hat{B} \in$ End(V) met spectrale decompositie

$$\hat{A} = \sum_{\lambda \in \sigma_{\hat{A}}} \lambda \hat{Q}_{\hat{A},\lambda}, \quad \hat{B} = \sum_{\mu \in \sigma_{\hat{B}}} \mu \hat{Q}_{\hat{B},\mu}.$$

Als verder wordt gegeven dat $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{0}$, toon dan aan dat er een gemeenschappelijke spectrale decompositie kan worden gevonden. Dat wil zeggen dat er een verzameling complementaire projectoren $\{\hat{P}_i, i \in I\}$ bestaat met I een bepaalde indexverzameling, zodat voldaan is aan de volgende eigenschappen:

$$\hat{P}_i \hat{P}_j = \delta_{i,j} \hat{P}_i, \quad \sum_{i \in I} \hat{P}_i = \hat{1}_V,$$

en

$$\hat{A} = \sum_{i \in I} \lambda_i \hat{P}_i, \quad \hat{B} = \sum_{i \in I} \mu_i \hat{P}_i.$$

(Gebaseerd op *Theorem 3.16.*)

Bewijs. Omdat A en B diagonaliseerbaar zijn kunnen we voor alle twee een spectraal decompositie uitvoeren:

$$A = \sum_{\lambda \in \sigma_A} \lambda Q^A_\lambda, B = \sum_{\mu \in \sigma_B} \mu Q^B_\mu$$

waarbij $\lambda \in \sigma_A$ en $\mu \in \sigma_B$ de eigenwaarden van respectievelijk A en B zijn, omdat Q^A_λ een polynoom is van A voor elke λ en Q^B_μ een polynoom is van B voor elke μ en $[A, B] = 0$ is:

$$[Q^A_\lambda, Q^B_\mu] = 0$$

als we nu $P_{\lambda,\mu} = Q^A_\lambda Q^B_\mu$ introduceren dan is:

$$P_{\lambda,\mu} P_{\lambda',\mu'} = Q^A_\lambda Q^B_\mu Q^A_{\lambda'} Q^B_{\mu'}$$

omdat $[Q^A_\lambda, Q^B_\mu] = 0$ kan je deze termen omwisselen dan heb je:

$$P_{\lambda,\mu} P_{\lambda',\mu'} = Q^A_\lambda Q^A_{\lambda'} Q^B_\mu Q^B_{\mu'}$$

omdat Q^A_λ ook gewoon een spectraal projector is geldt het volgende:

$$(Q^A_\lambda)^2 = Q^A_\lambda \quad \text{en als } \lambda \neq \lambda' \;\; Q^A_\lambda Q^A_{\lambda'} = 0$$

hierdoor wordt:

$$P_{\lambda,\mu} P_{\lambda',\mu'} = Q^A_\lambda Q^A_{\lambda'} Q^B_\mu Q^B_{\mu'} = \delta_{\lambda,\lambda'} \delta_{\mu,\mu'} Q^A_\lambda Q^B_\mu = \delta_{(\lambda,\mu);(\lambda',\mu')} P_{\lambda,\mu}$$

een tweede eigenschap van een spectraal operator is:

$$\sum_{\lambda \in \sigma_A} Q^A_\lambda = 1_V$$

hierdoor kan men ook vinden voor de samengestelde spectraal operator $P_{\lambda,\mu}$, dat:

$$\sum_{(\lambda,\mu) \in \sigma_A X \sigma_B} P_{\lambda,\mu} = \sum_{(\lambda,\mu) \in \sigma_A X \sigma_B} Q^A_\lambda Q^B_\mu = (\sum_{\lambda \in \sigma_A} Q^A_\lambda (\sum_{\mu \in \sigma_B} Q^B_\mu)) = 1_V$$

aangezien je altijd maal 1 kan doen wordt:

$$A = \sum_{\lambda\in\sigma_A} \lambda Q_\lambda^A = \sum_{\lambda\in\sigma_A} \lambda Q_\lambda^A \sum_{\mu\in\sigma_B} Q_\mu^B = \sum_{\lambda,\mu} \lambda P_{\lambda,\mu}$$

Hetzelfde kan gedaan worden voor B als we nu een subsitutie doen van alle (λ,μ) naar i waarbij i alle mogelijke combinaties van (λ,μ) doorloopt en de notatie λ vervangen door λ_i voor de eigenwaarden van A en ook bij B doen hetzelfde doen met een index j, kan het gevraagde teruggevonden worden. $\square$

3.8 Invariante deelruimte W, bij $\hat{A}+a\hat{1}$ (Lemma 3.17.)

Beschouw een invariante deelruimte $W \preceq V$ van een lineaire operator $\hat{A} \in$ End(V); toon aan dat dit ook een invariante deelruimte is van $\hat{A}+a\hat{1}$ voor elke scalair $a \in \mathbb{F}$. (Gebaseerd op *Lemma 3.17.*)

Bewijs. Als W een invariante deelruimte is van $\hat{A}$, dan geldt per definitie:

$$\hat{A}\mathbf{w} \in W \quad \forall \mathbf{w} \in W.$$

Beschouw nu de operator $\hat{A}+a\hat{1}$, waarbij $\hat{1}$ de identiteitsoperator is. Voor elke vector $\mathbf{w} \in W$ geldt:

$$(\hat{A}+a\hat{1})\mathbf{w} = \hat{A}\mathbf{w} + a\hat{1}\mathbf{w}.$$

De eerste term, $\hat{A}\mathbf{w}$, ligt in W omdat W invariant is onder $\hat{A}$. De tweede term, $a\hat{1}\mathbf{w}$, is gelijk aan $a\mathbf{w}$, en omdat $\mathbf{w} \in W$ en W een lineaire deelruimte is (dit is een eigenschap van deelruimten), volgt dat:

$$a\mathbf{w} \in W.$$

Daarom is:

$$(\hat{A}+a\hat{1})\mathbf{w} = \hat{A}\mathbf{w} + a\mathbf{w} \in W.$$

Hieruit volgt dat W een invariante deelruimte is van $\hat{A}+a\hat{1}$ voor elke $a \in \mathbb{F}$. $\square$

3.9 Invariante deelruimte $\ker(\hat{A}-\lambda\hat{1})^k$, onder $\hat{A}$ (Proposition 3.18) (!)

Toon aan dat $\ker(\hat{A}-\lambda\hat{1})^k$ voor elk natuurlijk getal $k \in \mathbb{N}$ een invariante deelruimte is van $\hat{A}$.

LET OP: dit was een vraag op het theorie-examen, 1^e zit academiejaar 2024-2025 !!
(Gebaseerd op *Proposition 3.18*)

Bewijs. Beschouw de lineaire operator $\hat{A} \in \mathrm{End}(V)$ en een scalair $\lambda \in \mathbb{F}$. We willen aantonen dat de k-de kern van $\hat{A}-\lambda\hat{1}$, genoteerd als $\ker(\hat{A}-\lambda\hat{1})^k$, een invariante deelruimte is van $\hat{A}$ voor elk natuurlijk getal $k \in \mathbb{N}$. Dit houdt in dat:

$$\forall \mathbf{v} \in \ker(\hat{A}-\lambda\hat{1})^k : \quad \hat{A}\mathbf{v} \in \ker(\hat{A}-\lambda\hat{1})^k.$$

De deelruimte $\ker(\hat{A}-\lambda\hat{1})^k$ wordt gedefinieerd als:

$$\ker(\hat{A}-\lambda\hat{1})^k = \{\mathbf{v} \in V \mid (\hat{A}-\lambda\hat{1})^k\mathbf{v} = \mathbf{0}\}.$$

We bewijzen nu dat $\hat{A}\mathbf{v} \in \ker(\hat{A}-\lambda\hat{1})^k$ voor elke $\mathbf{v} \in \ker(\hat{A}-\lambda\hat{1})^k$. Zij $\mathbf{v} \in \ker(\hat{A}-\lambda\hat{1})^k$. Per definitie geldt:

$$(\hat{A}-\lambda\hat{1})^k\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

We willen aantonen dat $\hat{A}\mathbf{v} \in \ker(\hat{A}-\lambda\hat{1})^k$, wat betekent dat:

$$(\hat{A}-\lambda\hat{1})^k(\hat{A}\mathbf{v}) = \mathbf{0}.$$

Beschouw $(\hat{A}-\lambda\hat{1})^k(\hat{A}\mathbf{v})$. Door de lineariteit van $(\hat{A}-\lambda\hat{1})^k$, schrijven we:

$$(\hat{A}-\lambda\hat{1})^k(\hat{A}\mathbf{v}) = (\hat{A}-\lambda\hat{1})^{k-1}(\hat{A}-\lambda\hat{1})(\hat{A}\mathbf{v}).$$

Omdat $(\hat{A}-\lambda\hat{1})(\hat{A}\mathbf{v})$ geschreven kan worden als:

$$(\hat{A}-\lambda\hat{1})(\hat{A}\mathbf{v}) = \hat{A}(\hat{A}-\lambda\hat{1})\mathbf{v},$$

door middel van links $\hat{A}$ uit de haken te halen en vervolgens rechts, $\hat{A}$, weer in te schuiven, volgt dat:

$$(\hat{A}-\lambda\hat{1})^k(\hat{A}\mathbf{v}) = \hat{A}(\hat{A}-\lambda\hat{1})^k\mathbf{v} = \hat{A}\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Hieruit volgt dan dus ook dat :

$$(\hat{A}-\lambda\hat{1})^k(\hat{A}\mathbf{v}) = \mathbf{0}.$$

Daarom is $\hat{A}\mathbf{v} \in \ker(\hat{A}-\lambda\hat{1})^k$ wat de invariantie aantoont van de deelruimte.

□

3.10 $\ker(\hat{A}-\lambda\hat{1})^k \preceq \ker(\hat{A}-\lambda\hat{1})^{k+1}$ voor $k \in \mathbb{N}$ (Proposition 3.18) (!)

Toon aan dat $\ker(\hat{A}-\lambda\hat{1})^k \preceq \ker(\hat{A}-\lambda\hat{1})^{k+1}$**.**

LET OP: dit was een vraag op het theorie-examen, 1^e zit academiejaar 2024-2025 !!
(Gebaseerd op *Proposition 3.18*)

Bewijs. Om aan te tonen dat $\ker(\hat{A}-\lambda\hat{1})^k \preceq \ker(\hat{A}-\lambda\hat{1})^{k+1}$, oftewel dat $\ker(\hat{A}-\lambda\hat{1})^k \subseteq \ker(\hat{A}-\lambda\hat{1})^{k+1}$, maken we gebruik van de definitie van kernen en eigenschappen van lineaire transformaties. Zij $\hat{B} = \hat{A}-\lambda\hat{1}$. Dan geldt:

$$(\hat{A}-\lambda\hat{1})^k = \hat{B}^k.$$

De kern van $\hat{B}^k$, genoteerd als $\ker(\hat{B}^k)$, is de verzameling van alle vectoren $\mathbf{v}$ waarvoor $\hat{B}^k\mathbf{v} = 0$. We willen aantonen dat elke vector $\mathbf{v} \in \ker(\hat{B}^k)$ ook behoort tot $\ker(\hat{B}^{k+1})$. Neem een willekeurige vector $\mathbf{v} \in \ker(\hat{B}^k)$. Dan geldt:

$$\hat{B}^k\mathbf{v} = 0.$$

Om na te gaan of $\mathbf{v} \in \ker(\hat{B}^{k+1})$, moeten we controleren of:

$$\hat{B}^{k+1}\mathbf{v} = 0.$$

Schrijf $\hat{B}^{k+1}$ als:

$$\hat{B}^{k+1} = \hat{B} \cdot \hat{B}^k.$$

Toepassing hiervan op $\mathbf{v}$ geeft:

$$\hat{B}^{k+1}\mathbf{v} = \hat{B}(\hat{B}^k\mathbf{v}).$$

Omdat $\hat{B}^k\mathbf{v} = 0$ (aangezien $\mathbf{v} \in \ker(\hat{B}^k)$), volgt:

$$\hat{B}^{k+1}\mathbf{v} = \hat{B}(0) = 0.$$

Hieruit concluderen we dat $\mathbf{v} \in \ker(\hat{B}^{k+1})$ en is het gevraagde bewezen. □

3.11 Invariante deeltruimte $\ker(\hat{A}-\lambda\hat{1})^s = \ker(\hat{A}-\lambda\hat{1})^{s+k}$ (Proposition 3.18) (!)

Toon ook aan dat als $\ker(\hat{A}-\lambda\hat{1})^s = \ker(\hat{A}-\lambda\hat{1})^{s+1}$**, dat dan ook geldt dat** $\ker(\hat{A}-\lambda\hat{1})^s = \ker(\hat{A}-\lambda\hat{1})^{s+k}$ **voor elk natuurlijk getal** k**.** (Gebaseerd op *Proposition 3.18*)
LET OP: dit was een vraag op het theorie-examen, 1^e zit academiejaar 2024-2025 !!

Bewijs. We weten dat V een eindig dimensionale ruimte is. Dit kunnen we toepassen in de dimensie stelling: $dim(ker(\hat{B}^k)) + dim(im(\hat{B}^k)) = dim(V)$, waarin we opnieuw $\hat{B} = \hat{A} - \lambda\hat{1}$ gebruiken, en aangezien V eindig dimensionaal is, is $ker(\hat{B}^k)$ ook eindig dimensionaal en kan niet blijven stijgen.

Als we s gebruiken als de eerste index waarvoor het de kern stabiliseert (en dus dat het verder toenemen van s niet correspondeert in een stijging van de dimensie) dan kunnen we dus schrijven dat $ker(\hat{B}^{s+1}) = ker(\hat{B}^s)$ en dus dat $ker(\hat{B}^{s+k}) = ker(\hat{B}^s)$ waarmee het gebraagde bewezen is. □

3.12 Invariante deelruimte im$(\hat{A}-\lambda\hat{1})^k$, onder $\hat{A}$ (Proposition 3.18) (!)

Toon aan dat im$(\hat{A}-\lambda\hat{1})^k$ **voor een natuurlijk getal** $k \in \mathbb{N}$ **een invariante deelruimte is van** $\hat{A}$**.**(Gebaseerd op *Proposition 3.18*)
LET OP: dit was een vraag op het theorie-examen, 1^e zit academiejaar 2024-2025 !!

Bewijs. We willen bewijzen dat $\mathrm{Im}((\hat{A}-\lambda I)^k)$ een invariante deelruimte is op lineaire operator $\hat{A} \in \mathrm{End}(V)$

Zij $v \in Im((\hat{A}-\lambda I)^k) \Rightarrow v = (\hat{A}-\lambda I)^k w$ met $w \in V$, want $(\hat{A}-\lambda I)^k$ werkt in op elementen van vectorruimte V.

Om aan te tonen dat $\mathrm{Im}((\hat{A}-\lambda I)^k)$ een invariante deelruimte is op lineaire operator $\hat{A}$, moet:

$$\hat{A}v = \hat{A}(\hat{A}-\lambda I)^k w \in Im((\hat{A}-\lambda I))^k \tag{19}$$

We weten dat $\hat{A}w \in V$, het doel is om een uitdrukking te vinden van de vorm $(\hat{A}-\lambda I)^k u$ met $u \in V$:

$$\begin{aligned}
\hat{A}(\hat{A}-\lambda I)^k w &= \hat{A}(\hat{A}-\lambda I)(\hat{A}-\lambda I)\ ...\ (\hat{A}-\lambda I)w \\
&= (\hat{A}^2-\hat{A}\lambda I)(\hat{A}-\lambda I)\ ...\ (\hat{A}-\lambda I)w \\
&= (\hat{A}^2-\lambda I\hat{A})(\hat{A}-\lambda I)\ ...\ (\hat{A}-\lambda I)w \\
&= (\hat{A}-\lambda I)\hat{A}(\hat{A}-\lambda I)\ ...\ (\hat{A}-\lambda I)w \\
&... \\
&= (\hat{A}-\lambda I)(\hat{A}-\lambda I)\ ...\ (\hat{A}-\lambda I)\hat{A}w \\
&= (\hat{A}-\lambda)^k\hat{A}w
\end{aligned}$$

Met $\hat{A}w \in V$ want $\hat{A} \in \mathrm{End}(V)$, dus herschrijven we $\hat{A}w = u \in V$ en vinden we wat we zochten:

$$(\hat{A}-\lambda)^k\hat{A}w = (\hat{A}-\lambda)^k u \in Im((\hat{A}-\lambda I))^k \tag{20}$$

□

3.13 $\mathbf{im}(\hat{A}-\lambda\hat{1})^k \succeq \mathbf{im}(\hat{A}-\lambda\hat{1})^{k+1}$ (Proposition 3.18) (!)

Toon aan dat $\mathbf{im}(\hat{A}-\lambda\hat{1})^k \succeq \mathbf{im}(\hat{A}-\lambda\hat{1})^{k+1}$.

LET OP: dit was een vraag op het theorie-examen, 1^e zit academiejaar 2024-2025 !!
(Gebaseerd op *Proposition 3.18*)

Bewijs. We moeten bewijzen dat $(\hat{A}-\lambda I)^{k+1}v \in Im((\hat{A}-\lambda)^k)$ met $v \in V$.

$$\begin{aligned}(\hat{A}-\lambda I)^{k+1}v &= (\hat{A}-\lambda I)^k(\hat{A}-\lambda I)v\\ &= (\hat{A}-\lambda I)^k w\end{aligned}$$

Met $w \in im(\hat{A}-\lambda I)$ en dus $w \in V$

dit betekend dat $(\hat{A}-\lambda I)^k w \in Im((\hat{A}-\lambda I)^k)$ en dus dat $(\hat{A}-\lambda I)^{k+1}v \in Im((\hat{A}-\lambda I)^k)$ $\forall v \in V$

We kunnen dus schrijven dat $Im((\hat{A}-\lambda I)^{k+1}) \leq Im((\hat{A}-\lambda I)^k)$ □

3.14 Invariante deelruimte $\mathbf{im}(\hat{A}-\lambda\hat{1})^s = \mathbf{im}(\hat{A}-\lambda\hat{1})^{s+k}$ (Proposition 3.18) (!)

Toon ook aan dat als $\mathbf{im}(\hat{A}-\lambda\hat{1})^s = \mathbf{im}(\hat{A}-\lambda\hat{1})^{s+1}$, dat dan ook geldt dat $\mathbf{im}(\hat{A}-\lambda\hat{1})^s = \mathbf{im}(\hat{A}-\lambda\hat{1})^{s+k}$ voor elk natuurlijk getal k.

LET OP: dit was een vraag op het theorie-examen, 1^e zit academiejaar 2024-2025 !!
(Gebaseerd op *Proposition 3.18*)

Bewijs. We tonen aan dat als $Im(\hat{A}-\lambda I)^k = Im(\hat{A}-\lambda I)^{k+1}$, dat dan ook $Im(\hat{A}-\lambda I)^k = Im(\hat{A}-\lambda I)^{k+n}$

als $Im(\hat{A}-\lambda I)^k = Im(\hat{A}-\lambda I)^{k+1}$ dan geld:

$Im(\hat{A}-\lambda I)^{k+1} = Im(\hat{A}-\lambda I)^{k+2} \Rightarrow Im(\hat{A}-\lambda I)^k = Im(\hat{A}-\lambda I)^{k+2}$

Dus dan is het triviaal dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt dat

$Im(\hat{A}-\lambda I)^k = Im(\hat{A}-\lambda I)^{k+n}$ □

3.15 $\mathbf{im}(\hat{A}-\lambda\hat{1})^s \cap \ker(\hat{A}-\lambda\hat{1})^s = \{0\}$ (Proposition 3.18) (!)

Toon aan dat als $\mathbf{im}(\hat{A}-\lambda\hat{1})^s = \mathbf{im}(\hat{A}-\lambda\hat{1})^{s+1}$ en $\ker(\hat{A}-\lambda\hat{1})^s = \ker(\hat{A}-\lambda\hat{1})^{s+1}$, dat dan geldt dat $\mathbf{im}(\hat{A}-\lambda\hat{1})^s \cap \ker(\hat{A}-\lambda\hat{1})^s = \{0\}$.

LET OP: dit was een vraag op het theorie-examen, 1^e zit academiejaar 2024-2025 !!
(Gebaseerd op *Proposition 3.18*)

Bewijs. Men weet uit het gegeven dat: $\mathrm{im}(\hat{A}-\lambda\hat{1})^s = \mathrm{im}(\hat{A}-\lambda\hat{1})^{s+1}$, $\ker(\hat{A}-\lambda\hat{1})^s = \ker(\hat{A}-\lambda\hat{1})^{s+1}$ over een eindig dimensionale vectorruimte V. Vervolgens beschouwt men eerst een vector $\vec{\boldsymbol{v}} \in (\ker(\hat{A}-\lambda\hat{1})^k \cap \mathrm{im}(\hat{A}-\lambda\hat{1})^k)$, voor elke k $\in \mathbb{Z}$. Vervolgens maken we gebruik van de definities van de kernel en image. We krijgen:

$$(\hat{A}-\lambda\hat{1})^k\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{0} \tag{21}$$

$$(\hat{A}-\lambda\hat{1})^k\vec{\boldsymbol{w}} = \vec{\boldsymbol{v}}, \exists\vec{\boldsymbol{w}} \in V \tag{22}$$

Door de uitdrukkingen 21 en 22 te combineren, kunnen we het volgende terugvinden:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (\hat{A}-\lambda\hat{1})^k\vec{\boldsymbol{w}} = \vec{\boldsymbol{v}}\\
&\Leftrightarrow (\hat{A}-\lambda\hat{1})^k \cdot (\hat{A}-\lambda\hat{1})^k\vec{\boldsymbol{w}} = (\hat{A}-\lambda\hat{1})^k \cdot \vec{\boldsymbol{v}}\\
&\Leftrightarrow (\hat{A}-\lambda\hat{1})^{2k}\vec{\boldsymbol{w}} = (\hat{A}-\lambda\hat{1})^k\vec{\boldsymbol{v}}\\
&\Leftrightarrow (\hat{A}-\lambda\hat{1})^{2k}\vec{\boldsymbol{w}} = \vec{0}
\end{aligned} \tag{23}$$

Deze laatste uitdrukking impliceert dat $\vec{\boldsymbol{w}} \in \ker(\hat{A}-\lambda\hat{1})^{2k}$. Maar als we vervolgens k $\geq$ s kiezen dan geldt uit het gegeven:

$$\ker(\hat{A}-\lambda\hat{1})^{2k} = \ker(\hat{A}-\lambda\hat{1})^k \tag{24}$$

Deze laatste vergelijking impliceert dat $\vec{\boldsymbol{w}} \in \ker(\hat{A}-\lambda\hat{1})^k$. Deze bevinding impliceert dan:

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \ker(\hat{A}-\lambda\hat{1})^k\vec{\boldsymbol{w}} = \vec{\mathbf{0}} \tag{25}$$

We vinden dan ten slotte dat $\mathrm{im}(\hat{A}-\lambda\hat{1})^s \cap \ker(\hat{A}-\lambda\hat{1})^s = \{0\}$ door de keuze k = s. (We kunnen dit resultaat combineren met de rang-nulliteitsstelling om te verkrijgen: $\mathrm{im}(\hat{A}-\lambda\hat{1})^k \oplus \ker(\hat{A}-\lambda\hat{1})^k = V$.) □

3.16 Bereken $\exp(J_\lambda^{(4)})$ (Section 3.4)

Gegeven een Jordan-block met eigenwaarde λ en grootte 4,

$$J_\lambda^{(4)} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Bereken $\exp(J_\lambda^{(4)})$. (Deels, gebaseerd op *Section 3.4*)

Bewijs. We willen de matrix-exponentiële van de Jordan-blok $J_\lambda^{(4)}$ berekenen, gegeven door

$$J_\lambda^{(4)} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Men kan deze op twee manieren berekenen, ofwel gebruikt men de algemeen bekomen vergelijking (3.75) op pagina 105 uit de cursus of men berekent dit op een intuïtieve manier hieronder gegeven. De matrix-exponentiële wordt gedefinieerd als

$$\exp(J_\lambda^{(4)}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(J_\lambda^{(4)})^k}{k!}.$$

Omdat $J_\lambda^{(4)} = \lambda I + N$, waarbij N een nilpotente matrix is, hebben we

$$\exp(J_\lambda^{(4)}) = \exp(\lambda I + N) = \exp(\lambda I) \cdot \exp(N).$$

Omdat $\exp(\lambda I) = e^\lambda I$, volgt dat

$$\exp(J_\lambda^{(4)}) = e^\lambda \cdot \exp(N).$$

De matrix N is gegeven door

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Omdat N nilpotent is, geldt dat $N^4 = 0$, en de matrix-exponentiële van N wordt gegeven door

$$\exp(N) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{N^k}{k!}.$$

Aangezien $N^4 = 0$, kunnen we de som tot de derde macht beperken:

$$\exp(N) = I + N + \frac{N^2}{2!} + \frac{N^3}{3!}.$$

We berekenen de eerste paar machten van N:

- N^2:

$$N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- N^3:

$$N^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- $N^4 = 0$.

We vullen de termen in:

$$\exp(N) = I + N + \frac{N^2}{2!} + \frac{N^3}{3!}.$$

Dit wordt:

$$\exp(N) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Door de matrices op te tellen, krijgen we:

$$\exp(N) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

De matrix-exponentiële van $J_\lambda^{(4)}$ is:

$$\exp(J_\lambda^{(4)}) = e^\lambda \cdot \exp(N).$$

Invullen geeft:

$$\exp(J_\lambda^{(4)}) = e^\lambda \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\square$

3.17 Bereken $\log(J_\lambda^{(3)})$ (Section 3.4)

Gegeven een Jordan-block met eigenwaarde λ en grootte 3,

$$J_\lambda^{(3)} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

waarbij verder gegeven is dat $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Bereken $\log(J_\lambda^{(3)})$. (Deels, gebaseerd op *Section 3.4*)

Bewijs. Gegeven een Jordan-blok $J_\lambda^{(3)}$ van grootte 3 met eigenwaarde λ:

$$J_\lambda^{(3)} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

We willen $\log(J_\lambda^{(3)})$ berekenen. Men kan deze op twee manieren berekenen, ofwel gebruikt men de algemeen bekomen vergelijking (3.75) op pagina 105 uit de cursus of men berekent dit op een intuïtieve manier hieronder gegeven. Schrijf $J_\lambda^{(3)}$ als de som van een diagonale matrix en een nilpotente matrix:

$$J_\lambda^{(3)} = \lambda I + N,$$

waarbij I de identiteitsmatrix is en N de nilpotente matrix:

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Merk op dat $N^3 = 0$, omdat N nilpotent is.

De matrix-logaritme is lineair als de matrices commuteren. Aangezien $J_\lambda^{(3)} = \lambda I + N$, en λI commutatief is met N, geldt:

$$\log(J_\lambda^{(3)}) = \log(\lambda I + N) = \log(\lambda I) + \log(I + \frac{N}{\lambda}).$$

De matrix λI is diagonaal, dus de logaritme van λI wordt componentgewijs toegepast:

$$\log(\lambda I) = \log(\lambda) I = \begin{bmatrix} \log(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & \log(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & \log(\lambda) \end{bmatrix}.$$

De Taylor-expansie van $\log(I + X)$ is $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i} X^i$ dus voor $X = \frac{N}{\lambda}$:

$$\log(I + \frac{N}{\lambda}) = \frac{N}{\lambda} - \frac{1}{2}\left(\frac{N}{\lambda}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{N}{\lambda}\right)^3 - \cdots.$$

Omdat $N^3 = 0$, wordt de reeks eindig:

$$\log(I + \frac{N}{\lambda}) = \frac{N}{\lambda} - \frac{1}{2}\left(\frac{N}{\lambda}\right)^2.$$

De matrix $\frac{N}{\lambda}$ is:

$$\frac{N}{\lambda} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

De tweede macht van $\frac{N}{\lambda}$ is:

$$\left(\frac{N}{\lambda}\right)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\lambda^2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

We hebben:

$$\log(I + \frac{N}{\lambda}) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\lambda^2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dus:

$$\log(I + \frac{N}{\lambda}) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda} & -\frac{1}{2\lambda^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Combineer dit met $\log(\lambda I)$:

$$\log(J_\lambda^{(3)}) = \log(\lambda)I + \log(I + \frac{N}{\lambda})$$

$$\log(J_\lambda^{(3)}) = \begin{bmatrix} \log(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & \log(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & \log(\lambda) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda} & -\frac{1}{2\lambda^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Het eindresultaat is:

$$\log(J_\lambda^{(3)}) = \begin{bmatrix} \log(\lambda) & \frac{1}{\lambda} & -\frac{1}{2\lambda^2} \\ 0 & \log(\lambda) & \frac{1}{\lambda} \\ 0 & 0 & \log(\lambda) \end{bmatrix}.$$

□

4 Normen en Afstanden

4.1 Ongelijkheden met Hölder p-normen

Beschouw standaard vectoren $v \in \mathbb{F}^n$, waarop we de familie van Hölder p-normen definiëren als:

$$\|v\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |v_k|^p \right)^{1/p} .$$

Vind voor elk van de onderstaande ongelijkheden de kleinste waarde C waarvoor de ongelijkheid geldt, en zoek een bijbehorende vector v waarvoor bij die waarde van C de ongelijkheid een gelijkheid wordt:

1. $\|v\|_2 \leq C\|v\|_1$
2. $\|v\|_\infty \leq C\|v\|_1$
3. $\|v\|_1 \leq C\|v\|_2$
4. $\|v\|_\infty \leq C\|v\|_2$
5. $\|v\|_1 \leq C\|v\|_\infty$
6. $\|v\|_2 \leq C\|v\|_\infty$

Definition 4.1. *Voor een vector $\boldsymbol{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{F}^n$, wordt de **Hölder's p-norm** gedefinieerd voor, $p \geq 1$, als zijnde*

$$||\boldsymbol{v}||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p \right)^{1/p}$$

en voor $p = \infty$, de oneindige norm genoemde, als

$$||\boldsymbol{v}||_\infty = \max_{i=1,\dots,n} (|v_i|)$$

Bewijs.
1. $||\boldsymbol{v}||_2 \leq C||\boldsymbol{v}||_1$:
Er geldt dat:

$$(\|v\|_1)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i| \right)^2 \geq \sum_{i=1}^{n} |v_i|^2 = (\|v\|_2)^2$$

$$\Downarrow$$

$$\|v\|_1 \geq \|v\|_2$$

Er geldt dus dat $C = 1$. De vector waarvoor de gelijkheid voldaan is, is van de vorm $(0, \dots, 0, a, 0, \dots, 0)$. Bijvoorbeeld een eenheidsvector voldoet hieraan.

2. $||\boldsymbol{v}||_\infty \leq C||\boldsymbol{v}||_1$:
Het valt makkelijk in te zien dat deze ongelijkheid geldig blijft bij een laagste constante, $C = 1$, kiest men namelijk, $C < 1$, dan kan men makkelijk inzien dat dat deze ongelijkheid

niet meer geldt voor vectoren $\boldsymbol{v} = (v_i)$, waarvoor $v_k = a$ en $v_i = 0$ met $i \neq k$ (vectoren met één niet nul element).

$$\max_{i=1,\ldots,n}(|v_i|) \leq C \sum_{i=1}^{n} |v_i|$$

De vectoren die van deze ongelijkheid een gelijkheid maken, zijn precies degene vermeldt hierboven en dus een vector die van deze ongelijkheid dus een gelijkheid maakt is bijvoorbeeld: $\boldsymbol{v} = (1, 0, ..., 0)$).

3. $||\boldsymbol{v}||_1 \leq C||\boldsymbol{v}||_2$:
Om de kleinste waarde voor de constante C te vinden waarvoor de ongelijk nog steeds geldt, impliceert dus dat:

$$\sup_{\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}} \frac{||\boldsymbol{v}||_1}{||\boldsymbol{v}||_2} = C$$

Men kan inzien dat een vector van de vorm $\boldsymbol{v} = (a, a, ..., a)$, met $a \in \mathbb{R}$ dit maximaal maakt. Want stel dat de componenten ongelijk verdeeld zouden zijn (bijvoorbeeld sommige groot en sommige klein, relatief gezien), dan wegen deze grotere termen, in de noemer meer door dan in de teller, dit doet de verhouding $R_1(\boldsymbol{v})$ verkleinen.

$$R_1(\boldsymbol{v}) = \frac{\|\boldsymbol{v}\|_1}{\|\boldsymbol{v}\|_2} = \frac{\sum_{k=1}^{n} |v_k|}{\left(\sum_{k=1}^{n} |v_k|^2\right)^{1/2}}$$

Kiest men dus het geval $\boldsymbol{v} = (a, a, a, \dots)$, dan vindt men als kleinste constante C, waarvoor de ongelijkheid nog geldt:

$$C = \sup_{\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}} \frac{\sum_{k=1}^{n} |a|}{\left(\sum_{k=1}^{n} |a|^2\right)^{1/2}} = \frac{n|a|}{\sqrt{n}|a|} = \sqrt{n}$$

Een vector, die de opgegeven ongelijkheid dus een gelijkheid maakt is bijvoorbeeld: $\boldsymbol{v} = (1, 1, ..., 1)$.

4. $||\boldsymbol{v}||_\infty \leq C||\boldsymbol{v}||_2$:
Dezelfde methode als in onderdeel **2.** kan gebruikt worden voor deze ongelijkheid.

$$\max_{i=1,\ldots,n}(|v_i|) \leq C \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2\right)^{1/2}$$

Het valt in te zien dat tot eenzelfde conclusie kan gekomen worden als bij onderdeel **2.** .

5. $||\boldsymbol{v}||_1 \leq C||\boldsymbol{v}||_\infty$:
Per definiet van de oneindig norm, moet volgende gelijkheid gelden:

$$|v_k| \leq \|\boldsymbol{v}\|_\infty$$

Sommeert men dan vervolgens over alle n's, dan vindt men de waarde $C = n$ terug.

$$\sum_{k=1}^{n} |v_k| \leq n \cdot \|\boldsymbol{v}\|_\infty.$$

De ongelijkheid wordt een gelijkheid voor vectoren van de vorm $\boldsymbol{v} = (a, a, \dots, a)$, en dus bijvoorbeeld een vector die hiervan een gelijkheid maakt is $\boldsymbol{v} = (1, 1, \dots, 1)$.

6. $||\boldsymbol{v}||_2 \leq C||\boldsymbol{v}||_\infty$:
Eenzelfde truc als in vorige deelvraag kan worden toegepast om C terug te vinden, namelijk:

$$|v_k|^2 \leq \|\boldsymbol{v}\|_\infty^2$$

Sommeert men opnieuw over alles n's dan vindt men nu een $C : \sqrt{n}$.

$$\sum_{k=1}^{n} |v_k|^2 \leq n \cdot \|\boldsymbol{v}\|_\infty^2$$
$$\implies \left(\sum_{k=1}^{n} |v_k|^2\right)^{1/2} \leq \sqrt{n} \cdot \|\boldsymbol{v}\|_\infty$$

Opnieuw geldt dat de vector die van de ongelijkheid een gelijkheid maakt, van de vorm $\boldsymbol{v} = (a, a, \ldots, a)$ moet zijn, een vector die gelijkheid teweeg brengt, is bijvoorbeeld: $\boldsymbol{v} = (1, 1, ..., 1)$.

$\square$

4.2 Hölder's ongelijkheid (Lemma 4.2)

Gegeven de ongelijkheid van Young:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}: \quad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

waarbij $p, q > 1$ **en** $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$**. Gebruik deze ongelijkheid om aan te tonen dat twee standaard vectoren** $v, w \in \mathbb{F}^n$ **voldoen aan Hölder's ongelijkheid:**

$$\sum_{i=1}^{n} |v_i||w_i| \leq \|v\|_p \|w\|_q.$$

(Gebaseerd op *Lemma 4.2*)

Bewijs. In het bewijs om **Hölder's ongelijkheid** aan te tonen maakt men gebruikt van **Young's ongelijkheid**, die luidt: $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$, waarbij $p \in \mathbb{R}$ en $q = p/(p-1)$. Beschouw een willekeurige vector $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{F}^n$, dan kan voor deze vectoren a_i, b_i definiëren zodat: $a_i = \frac{|v_i|}{||\boldsymbol{v}||_p}$ en$b_i = \frac{|w_i|}{||\boldsymbol{w}||_q}$ $\forall n$, men kan dan schrijven dat:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} |v_i||w_i|}{||\boldsymbol{v}||_p ||\boldsymbol{w}||_q}$$

Men gebruikt hierop nu de **ongelijkheid van Young**, zodat:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} |v_i||w_i|}{||\boldsymbol{v}||_p ||\boldsymbol{w}||_q} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p}{||\boldsymbol{v}||_p^p \ p} + \frac{\sum_{i=1}^{n} |w_i|^q}{||\boldsymbol{w}||_q^q \ q}$$

Men ziet dan vervolgens in dat $\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p = ||\boldsymbol{v}||_p^p$, aangezien dit de definitie van de p-norm, $||.||_p$, is en dus kan men uit voorgaande regel het te bewijzen terugvinden.

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} |v_i||w_i|}{||\boldsymbol{v}||_p ||\boldsymbol{w}||_q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\implies \sum_{i=1}^{n} |v_i||w_i| \leq ||\boldsymbol{v}||_p ||\boldsymbol{w}||_q$$

□

4.3 Minkowski ongelijkheid (Lemma 4.3)

Gebruik de bovenstaande ongelijkheid van Hölder om aan te tonen dat vectoren $v, w \in \mathbb{F}^n$ voldoen aan de Minkowski ongelijkheid:

$$\|v + w\|_p \leq \|v\|_p + \|w\|_p,$$

dewelke uitdrukt dat de p-norm voldoet aan de driehoeksongelijkheid (en dus een geldige norm is).
(Gebaseerd op *Lemma 4.3*)

Bewijs. Opnieuw zal in dit bewijs gebruik gemaakt worden van **Young's ongelijkheid**, net als van **Hölder's ongelijkheid** om **Minkowski's ongelijkheid**, na te gaan. Gebruikt men de definitie van de p-norm, $||.||_p$, dan kan men $||\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}||_p^p$ gaan schrijven als:

$$||\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}||_p^p = \sum_{i=1}^{n} |v_i + w_i|^p = \sum_{i=1}^{n} |v_i + w_i| \ |v_i + w_i|^{p-1}$$

De driekhoeksongelijkheid vertelt bij de p-norm, geeft ons dus dan volgende ongelijkheid.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |v_i + w_i| \ |v_i + w_i|^{p-1} &\leq \sum_{i=1}^{n} |v_i| \ |v_i + w_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |w_i| \ |v_i + w_i|^{p-1} \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |v_i| \ u_i + \sum_{i=1}^{n} |w_i| \ u_i\end{aligned}$$

waarbij $u_i = |v_i + w_i|^{p-1}$. Op de twee termen in het rechterlid van de ongelijkheid, pas men nu de Holder ongelijkheid toe zodat:

$$||\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}||_p^p \leq ||\boldsymbol{v}||_p \ ||\boldsymbol{u}||_q + ||\boldsymbol{w}||_p \ ||\boldsymbol{u}||_q$$

Wetend uit de ongelijkheid van Young dat $q = p/(p-1)$en kan vinden voor $||\boldsymbol{u}||$ dat:

$$||\boldsymbol{u}||_q = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i + w_i|^{q(p-1)} \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i + w_i|^p \right)^{\frac{p-1}{p}} = ||\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}||_p^{p-1}$$

Na de terug substitutie van $||\boldsymbol{u}||_q$ in de laatste ongelijkheid, deelt men vervolgens door $||\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}||_p^{p-1}$, om zo de ongelijkheid van Minkowski terug te vinden. □

4.4 Een begrensde operator $\hat{A}$ is een continue afbeelding (Proposition 4.17.)

Beschouw een lineaire afbeelding $\hat{A} \in \mathbf{Hom}(V, W)$ tussen genormeerde vectorruimten $(V, \|\cdot\|_V)$ en $(W, \|\cdot\|_W)$ die begrensd is, zodat de geïnduceerde norm voldoet aan $\|\hat{A}\|_{V\to W} = C < \infty$. Toon aan dat $\hat{A}$ een continue afbeelding is van V naar W. (Gebaseerd op *Proposition 4.17.*)

Bewijs. Ter herinnering, de intuïtieve definitie van continuïteit van een functie, afbeelding (**voor fysici**): $f(x)$ is overal continu $\iff$ als $(x - x_0) \leq \delta$ impliceert $(\Longrightarrow)$ dat $(f(x) - f(x_0)) \leq \epsilon$, zo klein mogelijk gemaakt kan worden als men maar wil, oftewel $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Als afbeelding $\hat{A} \in \mathrm{Hom}(V, W)$, lineair is en begrensd is voor $||\hat{A}||_{V\to W} = C$ dan volgt er direct dat $||\hat{A}||$, continu is, namelijk, kies twee willekeurige vectoren $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v'} \in V$ dan kan men altijd een δ vinden zodat: $||\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v'}||_{V\to W} \leq \delta$. Kijkt men vervolgens naar de norm van:

$$||\hat{A}\boldsymbol{v} - \hat{A}\boldsymbol{v'}||_{V\to W} = ||\hat{A}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v'})||_{V\to W} \leq ||\hat{A}||_{V\to W}||\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v'}||_{V\to W}$$
$$\Longrightarrow ||\hat{A}\boldsymbol{v} - \hat{A}\boldsymbol{v'}||_{V\to W} \leq C||\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v'}||_{V\to W} \leq C\delta =: \epsilon$$

□

4.5 De 1-norm, $||.||_{1\longrightarrow 1}$, voor een matrix A (Example 4.14.)

Beschouw matrices $A \in$ Hom($\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m$), i.e. $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, waarbij we op zowel $W = \mathbb{F}^m$ als $V = \mathbb{F}^n$ de 1-norm beschouwen. De geïnduceerde norm voor A wordt dan gegeven door:

$$\|A\|_{1\to 1} = \sup\left\{ \frac{\|Av\|_1}{\|v\|_1} = \frac{\sum_{i=1}^m \left|\sum_{j=1}^n A_{ij}v_j\right|}{\sum_{j=1}^n |v_j|}, \, v \in \mathbb{F}^n, v \neq 0 \right\}.$$

Toon eerst aan dat voldaan is aan de bovengrens:

$$\frac{\|Av\|_1}{\|v\|_1} \leq \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^m |A_{ij}|$$

voor alle vectoren $v \in \mathbb{F}^n$. Toon verder aan dat je een vector v kan vinden waarvoor deze ongelijkheid geldt als gelijkheid. Dit toont aan dat het rechterlid van de ongelijkheid overeenkomt met de maximale waarde, of dus dat:

$$\|A\|_{1\to 1} = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^m |A_{ij}|.$$

(Gebaseerd op *Example 4.14.*)

Bewijs. Men gebruikt de definitie van $||A||_1$ om de boven grens te gaan vinden en de ongelijkheid aan te tonen.

$$\frac{||A\boldsymbol{v}||_1}{||\boldsymbol{v}||_1} = \frac{\sum_{i=1}^m |\sum_{j=1}^n A_{i,j}v_j|}{\sum_{k=1}^n |v_k|} \leq \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |A_{i,j}v_j|}{\sum_{k=1}^n |v_k|}$$

Men weet dat voor de absolute waarde geldt dat $|ab| = |a|\ |b|$, brengt men dan vervolgens de noemer binnen in de dubbele som, dit mag aangezien het resultaat van de noemer als een getal kan beschouwd worden, dan kan men de ongelijkheid schrijven als

$$\frac{||A\boldsymbol{v}||_1}{||\boldsymbol{v}||_1} \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |A_{i,j}| \frac{|v_j|}{\sum_{k=1}^n |v_k|} = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m |A_{i,j}| \right) a_j$$

hierbij heeft voor het gemak $|v_j|/(\sum_{k=1}^n |v_k|)$ gesubstitueerd met a_j, waarvan men weet dat $a_j \leq 1$. Men kan dan ook gaan inzien dat onderstaande ongelijkheid geldig is aangezien $\sum_{j=1}^n a_j = 1$.

$$\sum_{j=1}^n x_j a_j \leq \sum_{j=1}^n \max_{j=1,\dots,n} (x_j) a_j = \max_{j=1,\dots,n} x_j$$

Doet men dit nu voor de eerder gevonden ongelijk, dan vindt men onmiddellijk het te bewijzen terug, namelijk dat:

$$\frac{||A\boldsymbol{v}||_1}{||\boldsymbol{v}||_1} \leq \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^m |A_{i,j}|$$

De triviale vector die van deze ongelijkheid een gelijkheid maakt is van de vorm:

$$v_j = \begin{cases} 1, & \text{als } j = j^* \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

hierbij is j^*, de index van de kolom (van matrix A), waarvan de kolom som maximaal is. $\square$

4.6 De ∞-norm, $||.||_{\infty \longrightarrow \infty}$, voor een matrix A (Proposition 4.24.)

Doorloop dezelfde stappen als in de vorige vraag, maar nu met de ∞-norm, waarbij geldt dat:

$$\|A\|_{\infty\to\infty} = \sup\left\{\frac{\|Av\|_\infty}{\|v\|_\infty} = \frac{\max_{i=1,\dots,m}\left|\sum_{j=1}^n A_{ij}v_j\right|}{\max_{j=1,\dots,n}|v_j|}, \, v \in \mathbb{F}^n, v \neq 0\right\}.$$

Toon opnieuw eerst de ongelijkheid:

$$\frac{\|Av\|_\infty}{\|v\|_\infty} \leq \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^n |A_{ij}|,$$

en toon verder aan dat deze ongelijkheid een gelijkheid wordt voor specifieke vectoren $v \in \mathbb{F}^n$.
(Gebaseerd op *Proposition 4.24.*)

Bewijs. Men gebruikt de definitie van $||A||_\infty$ om de boven grens te gaan vinden en de ongelijkheid aan te tonen.

$$\frac{||A\boldsymbol{v}||_\infty}{||\boldsymbol{v}||_\infty} = \frac{\max_{i=1,\dots,m} |\sum_{j=1}^n A_{i,j}v_j|}{\max_{j=1,\dots,n}|v_j|} \leq \frac{\max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^n |A_{i,j}v_j|}{\max_{j=1,\dots,n}|v_j|}$$

Men weet dat voor de absolute waarde geldt dat $|ab| = |a| \; |b|$, ook weet men dat $\max_{i=1,\dots,n}(v_i)/a = \max_{i=1,\dots,n}(v_i/a)$, met $a \in \mathbb{R}$, dus volgt

$$\frac{||A\boldsymbol{v}||_\infty}{||\boldsymbol{v}||_\infty} \leq \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^n \frac{|A_{i,j}| \; |v_j|}{\max_{j=1,\dots,n}|v_j|}$$

Als laatste stap in het bewijs tracht men in te zien dat onderstaande ongelijkheid geldig is $\forall j$, aangezien namelijk bij de v_j die dit maximaal maakt de teller gewoon weg deelt met zich zelfs in bovenstaande ongelijkheid.

$$\max_{j=1,\dots,n}|v_j| \geq |v_j| \iff \frac{|v_j|}{\max_{j=1,\dots,n}|v_j|} \leq 1$$

$$\implies \frac{||A\boldsymbol{v}||_\infty}{||\boldsymbol{v}||_\infty} \leq \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^n |A_{i,j}|$$

Men ziet ook dat de triviale vector die deze ongelijkheid een gelijkheid maakt moet bestaan uit elementen $v_j = \pm k$, waarbij $k \in \mathbb{R}_0$. $\square$

4.7 Gelfand formule (Proposition 4.24.)

Gegeven een submultiplicatieve norm op de ruimte van lineaire operatoren op een vectorruimte V, i.e. een norm die voor alle operatoren $\hat{A}, \hat{B} \in \mathbf{End}(V)$ voldoet aan:

$$\|\hat{A}\hat{B}\| \leq \|\hat{A}\|\|\hat{B}\|,$$

toon aan dat:

$$\lim_{n\to\infty} \|\hat{A}^n\|^{1/n} = \rho(\hat{A}),$$

waarbij $\rho(\hat{A})$ de spectraalstraal van $\hat{A}$ is (het maximum van alle absolute waarden van eigenwaarden van $\hat{A}$).(niet verbeterd)

Definition 4.2. *Laat $||.||$ een norm zijn op de ruimte van lineaire operatoren End(V) van een vectorruimte V. Als $||\hat{A}\hat{B}|| \leq ||\hat{A}||\ ||\hat{B}||$, dan noemt men $||.||$* ***submultiplicatief****.*

Definition 4.3. *De spectraal straal van een operator $\hat{A}$ ∈End(V) wordt gedefinieerd als, zijnde:*

$$\rho_{\hat{A}} = \sup\{|\lambda|; \lambda \in \sigma_{\hat{A}}\}$$

hierbij is wordt de spectraal straal dus de absolute waarde van de grootste bijhorende eigenwaarden van operator $\hat{A}$.

(Gebaseerd op *Proposition 4.24.*)

Bewijs. Voor een submultiplicatieve norm weet men uit **Definitie 4.2** dat het volgende moet gelden, namlijk dat $||\hat{A}^n|| \leq ||\hat{A}||^n$, dit impliceert dus ook als $||\hat{A}|| \leq 1$, dat:

$$\lim_{n\to\infty} ||\hat{A}^n|| \leq \lim_{n\to\infty} ||\hat{A}||^n = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \hat{A}^n = \hat{0}$$

uit de jordan-decompositie (≈> zie dit als een soort diagonalisatie) blijkt dus dat de spectraal straal, $\rho_{\hat{A}}$ (≈> alle eigenwaarden, λ) kleiner is dan 1 zie **Definitie 4.3**.
($A^n = PD^nP^{-1}$, voor $n \longrightarrow \infty$, kan enkel als elke eigenwaarde op diagonaal zelf naar nul gaat als de nulmatrix bekomen moet worden en dus moet $\lambda_i < 1$)

Construeert men vervolgens de operator $\hat{B}_\epsilon = (\rho_{\hat{A}} + \epsilon)^{-1}\hat{A}$, voor een $\epsilon > 0$, met bijhorende spectraal straal, $\rho_{\hat{B}_\epsilon} = \rho_{\hat{A}}(\rho_{\hat{A}} + \epsilon)^{-1}$, men ziet dan makkelijk in voor, $\epsilon > 0$ dat $\rho_{\hat{B}_\epsilon} < 1$ en dus opnieuw $\lim_{n\to\infty}(\hat{B}_\epsilon)^n = 0$. Volgens de fundamentele definitie van een limiet, kan men dus altijd een N_ϵ vinden, zodat $||(\hat{B}_\epsilon)^n|| < 1$ voor alle $n > N_\epsilon$. Schrijft men dit $\hat{B}_\epsilon$ terug in termen van $\hat{A}$, operator dan vindt men $||\hat{A}^n|| < (\rho_{\hat{A}} + \epsilon)^n$ en dus $||\hat{A}^n||^{1/n} \leq \rho_{\hat{A}} + \epsilon$, uit een eerdere stelling in de syllabus weet men ook dat voor een submultiplicatieve norm, $||.||$ geldt dat: $||\hat{A}^n|| \geq \rho_{\hat{A}}^n$, dan volgt hier uit de **Gelfand formule** triviaal, namelijk, er kan voor elke $\epsilon > 0$, een N_ϵ gevonden worden zodat dat $\rho_{\hat{A}} \leq ||\hat{A}^n||^{1/N} \leq \rho_{\hat{A}} + \epsilon$ voor alle $n \geq N_\epsilon$, oftewel de volgens de definitie van een limiet:

$$\lim_{n\to\infty} ||\hat{A}^n||^{1/n} = \rho_{\hat{A}}$$

□

4.8 Geperturbeerd lineair stelsel en conditiegetal (Section 4.4.2)

Gegeven een inverteerbare lineaire operator $\hat{A} \in \mathbf{End}(V)$ op de genormeerde vectorruimte $(V, \|\cdot\|)$, beschouw het lineaire stelsel $\hat{A}x = y$ alsook het geperturbeerde stelsel $\hat{A}(x + \Delta x) = (y + \Delta y)$. Toon aan dat je de relatieve norm van de perturbatie in de oplossing $\|\Delta x\|/\|x\|$ kan begrenzen in termen van de relatieve norm van de perturbatie op het rechterlid $\|\Delta y\|/\|y\|$ en het conditiegetal $\kappa(\hat{A}) = \|\hat{A}\|\|\hat{A}^{-1}\|$, waarbij we voor $\hat{A} \in \mathbf{End}(V)$ de geïnduceerde norm gebruiken. Toon ook aan dat $\kappa(\hat{A}) \geq 1$.

Definition 4.4. *Als $\hat{A} \in$ End(V), een lineaire operator is op een genormeerde vectorruimte $(V, ||.||)$, dan wordt het* ***conditie getal*** *gedefinieerd als volgt:*

$$\kappa(\hat{A}) = \begin{cases} ||\hat{A}||\ ||\hat{A}^{-1}||, & \textit{als } \hat{A} \textit{ inverteerbaar is} \\ +\infty, & \textit{elders} \end{cases} \tag{26}$$

(Gebaseerd op *Section 4.4.2*)

Bewijs. Men kan voor een geperturbeerd systeem $\hat{A}(x + \Delta x) = y + \Delta y$, schrijven dat $\hat{A}(x)+\hat{A}(\Delta x) = y+\Delta y$, wetend uit de opgave dat $\hat{A}x = y$, moet dus bijgevolg $\hat{A}(\Delta x) = \Delta y$ gelden. Men kan dan $||\Delta x||/||x||$ gaan begrenzen met behulp van de driehoeksongelijkheid $(||y|| = ||\hat{A}x|| \leq ||\hat{A}||\ ||x||)$ en de **Definitie 4.4**, namelijk:

$$\frac{||\Delta x||}{||x||} = \frac{||\hat{A}^{-1}\Delta y||}{||x||} \leq \frac{||\hat{A}^{-1}||\ ||\Delta y||}{||y||/||\hat{A}||} = \kappa(\hat{A})\frac{||\Delta y||}{||y||} \tag{27}$$

Start men nu uit de definitie voor hetconditie getal, **Definitie 4.4**, dan kan men met behulp van de (omgekeerde) driehoeksongelijkheid ook aantonen dat:

$$\kappa(\hat{A}) = ||\hat{A}||\ ||\hat{A}^{-1}|| \geq ||\hat{A}^{-1}\hat{A}|| = ||\hat{1}|| = 1 \tag{28}$$

□

5 Inwendige Producten

5.1 Cauchy-Schwarz-Bunjakowski ongelijkheid (Theorem 5.2.)

Gegeven een vectorruimte V met een inwendig product (een positief definiete Hermitische sesquilineaire vorm) $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Toon de bekende Cauchy-Schwarz-Bunjakowski ongelijkheid aan:

$$|\langle v, w \rangle|^2 \leq \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle, \quad \forall v, w \in V.$$

Toon met behulp hiervan ook aan dat de definitie $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ voldoet, i.e., dat $\|av\| = |a|\|v\|$ en $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$. (Gebaseerd op *Theorem 5.2.*)

Bewijs. Als $v = 0$, dan geldt $\langle v, w \rangle = 0$ en dus $|\langle v, w \rangle|^2 = 0$. Hieruit volgt dan de **Cauchy-Schwartz-Bunjakowski ongelijkheid**:

$$|\langle v, w \rangle|^2 \leq \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle.$$

Neem nu $v \neq 0$. Beschouw de vector $av - w$, waarbij $a \in \mathbb{C}$. Het inwendig product voldoet aan:

$$\langle av - w, av - w \rangle \geq 0, \quad \text{(positieve definiet)}.$$

Men werkt dit dan vervolgens uit, d.m.v. de (anti-)lineariteit in het eerste/tweede argument tot:

$$\langle av - w, av - w \rangle = |a|^2 \langle v, v \rangle - \overline{a} \langle v, w \rangle - a \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle.$$

Kiest men $a = \frac{\langle v,w \rangle}{\langle v,v \rangle} = \frac{\overline{\langle w,v \rangle}}{\langle v,v \rangle}$, dit mag omdat $v \neq 0$, en vult men dit dan in, dan vindt men:

$$|a|^2 = \frac{|\langle v, w \rangle|^2}{\langle v, v \rangle^2}.$$

Substitueert men dan vervolgens a in de voorgaande uitdrukking hierboven dan wordt deze:

$$\begin{aligned}
& \langle av - w, av - w \rangle \geq 0 \\
\iff \quad & \frac{|\langle v, w \rangle|^2}{\langle v, v \rangle^2} \langle v, v \rangle - \frac{\overline{\langle v, w \rangle}}{\langle v, v \rangle} \langle v, w \rangle - \frac{\overline{\langle w, v \rangle}}{\langle v, v \rangle} \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle \geq 0 \\
\iff \quad & \frac{|\langle v, w \rangle|^2}{\langle v, v \rangle^2} \langle v, v \rangle - 2 \frac{|\langle w, v \rangle|^2}{\langle v, v \rangle} \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle \geq 0 \\
\iff \quad & - \frac{|\langle v, w \rangle|^2}{\langle v, v \rangle} + 2 \frac{|\langle v, w \rangle|^2}{\langle v, v \rangle} \leq \langle w, w \rangle \\
\iff \quad & |\langle v, w \rangle|^2 \leq \langle w, w \rangle \langle v, v \rangle
\end{aligned}$$

Dit bewijst de ongelijkheid. De ongelijkheid wordt een gelijkheid enkel en alleen als $av - w = 0$, oftewel als $w = av$, wat betekent dat v en w lineair afhankelijk zijn. $\square$

5.2 Parallellogramwet (Proposition 5.5)

Gegeven een vectorruimte V met een inwendig product $\langle\cdot,\cdot\rangle$ en bijbehorende norm $\|v\|^2 = \langle v, v\rangle$. Toon aan dat deze norm voldoet aan de parallellogramwet:

$$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2).$$

Kan je ook illustreren wat deze gelijkheid uitdrukt voor de standaard Euclidische norm (2-norm) voor vectoren in het vlak $\mathbb{R}^2$? (Gebasseerd op *Proposition 5.5*)

Bewijs. .

1. Berekening van $\|v+w\|^2$

   $$\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w\rangle = \langle v,v\rangle + \langle v,w\rangle + \langle w,v\rangle + \langle w,w\rangle.$$

   Omdat het inwendig product bilineair en symmetrisch is, hebben we:

   $$\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + 2\langle v,w\rangle + \|w\|^2.$$

2. Berekening van $\|v-w\|^2$

   $$\|v-w\|^2 = \langle v-w, v-w\rangle = \langle v,v\rangle - \langle v,w\rangle - \langle w,v\rangle + \langle w,w\rangle.$$

   Dit geeft:

   $$\|v-w\|^2 = \|v\|^2 - 2\langle v,w\rangle + \|w\|^2.$$

3. Som van $\|v+w\|^2$ en $\|v-w\|^2$ Door de twee uitdrukkingen op te tellen, krijgen we:

   $$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = (\|v\|^2 + 2\langle v,w\rangle + \|w\|^2) + (\|v\|^2 - 2\langle v,w\rangle + \|w\|^2).$$

   Hierbij vereenvoudigen de termen $2\langle v,w\rangle$ en $-2\langle v,w\rangle$ elkaar, zodat:

   $$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2.$$

Conclusie We hebben aangetoond dat de parallellogramwet geldt:

$$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2).$$

Illustratie in $\mathbb{R}^2$ In de standaard Euclidische norm op $\mathbb{R}^2$, geldt:

$$\langle v,w\rangle = v_1w_1 + v_2w_2, \quad \|v\|^2 = v_1^2 + v_2^2.$$

De parallellogramwet zegt dat de som van de kwadraten van de lengtes van de diagonalen van een parallellogram gelijk is aan twee keer de som van de kwadraten van de lengtes van de zijden. □

5.3 Orthogonaliteit $\Longrightarrow$ lineaire onafhankelijkheid (Proposition 5.7)

Gegeven een vectorruimte V met een inwendig product $\langle \cdot, \cdot \rangle$, alsook een verzameling van onderling orthogonale vectoren $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, i.e., $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ als $i \neq j$. Toon aan dat deze verzameling lineair onafhankelijk is. (Gebaseerd op *Proposition 5.7*)

Bewijs. We moeten aantonen dat als een lineaire combinatie van de vectoren in S gelijk is aan de nulvector, alle coëfficiënten $c_1, c_2, \ldots, c_n$ gelijk zijn aan nul. Beschouw een lineaire combinatie van de vectoren in S:

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n = 0,$$

waarbij $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ (of $\mathbb{C}$, afhankelijk van V). Neem het inwendig product van beide zijden met een willekeurige vector $v_k \in S$:

$$\langle c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n, v_k \rangle = \langle 0, v_k \rangle.$$

Door lineariteit van het inwendig product volgt:

$$c_1^* \langle v_1, v_k \rangle + c_2^* \langle v_2, v_k \rangle + \cdots + c_n^* \langle v_n, v_k \rangle = 0.$$

Omdat de vectoren in S onderling orthogonaal zijn, geldt:

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad \text{voor } i \neq j.$$

Alleen de term $c_k^* \langle v_k, v_k \rangle$ blijft over:

$$c_k^* \langle v_k, v_k \rangle = 0.$$

Omdat $\langle v_k, v_k \rangle > 0$ (positieve definitie van het inwendig product), volgt:

$$c_k^* = 0.$$

Dit geldt voor alle $k = 1, 2, \ldots, n$. Dus:

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0.$$

De verzameling $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ is dus lineair onafhankelijk.

□

5.4 Orthogonaliteit en de stelling van Pythagoras (Theorem 5.9)

Gegeven een vectorruimte V met een inwendig product $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en twee orthogonale vectoren $v_1, v_2 \in V$ met dus $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$. Toon aan dat deze voldoen aan de stelling van Pythagoras, namelijk:

$$\|v_1 + v_2\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2.$$

Geldt ook het omgekeerde, m.a.w. kan je uit $\|v_1 + v_2\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2$ besluiten dat v_1 en v_2 orthogonale vectoren zijn? (Gebaseerd op *Theorem 5.9*)

Bewijs. We beperken ons tot het geval $n = 2$, d.w.z. $\|v_1 + v_2\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2$.
1) Orthogonaliteit $\implies$ Pythagoras:
Als v_1 en v_2 orthogonaal zijn ($\langle v_1, v_2 \rangle = 0$), is de te bewijzen gelijkheid direct terug te vinden. Dit volgt uit de definitie van het inwendig product en orthogonaliteit:

$$\|v_1 + v_2\|^2 = \langle v_1 + v_2, v_1 + v_2 \rangle = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + \langle v_1, v_2 \rangle \ + \langle v_2, v_1 \rangle$$

Omdat $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ en dus ook $\overline{\langle v_1, v_2 \rangle} = \langle v_2, v_1 \rangle = 0$ blijft:

$$\|v_1 + v_2\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2$$

2) Pythagoras $\implies$ Orthogonaliteit:
Stel dat $\|v_1 + v_2\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2$. Schrijf de linkerkant uit:

$$\|v_1 + v_2\|^2 = \langle v_1 + v_2, v_1 + v_2 \rangle.$$

De uitwerking hiervan geeft opnieuw:

$$\langle v_1 + v_2, v_1 + v_2 \rangle = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + \langle v_1, v_2 \rangle \ + \langle v_2, v_1 \rangle$$

Wegens het veronderstelde moet dus gelden dat: $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$.

□

5.5 Orthogonale directe som decompositie (Theorem 5.16)

Gegeven een Hilbertruimte V met een inwendig product $\langle\cdot,\cdot\rangle$ en een projector $\hat{P} \in \mathbf{End}(V)$, met dus $\hat{P}^2 = \hat{P}$, die bovendien voldoet aan $\langle v, \hat{P}w\rangle = \langle \hat{P}v, w\rangle$ ($\hat{P}$ is zelftoegevoegd). Toon aan dat de directe som decompositie $V = \mathbf{im}(\hat{P}) \oplus \ker(\hat{P})$ een orthogonale directe som decompositie is, i.e., dat $\mathbf{im}(\hat{P}) \perp \ker(\hat{P})$. (Gebaseerd op *Theorem 5.16*)

Bewijs. Men weet ui het gegeven het volgende:

1. Een gesloten deelruimte W waarbij $\hat{P}_W$ de projectie operator voorstelt corresponderend met to projectie van W op $W^\perp$.
2. $\hat{P}_W v \in W$ en $(\hat{I} - \hat{P}_W)v \in W^\perp \forall v \in V$, men gaat dus uit van $\langle \hat{P}v, w\rangle = \langle v, \hat{P}w\rangle$ en $\hat{P}^2 = \hat{P}$.

1. **Orthogonaliteit**
   $\Rightarrow$ We vinden voor alle $v, w \in V$:
   $$\langle \hat{P}_W v, w\rangle = \langle \hat{P}_W v, \hat{P}_W w\rangle + \langle (\hat{I} - \hat{P}_W)v, w\rangle = \langle \hat{P}_W v, \hat{P}_W w\rangle,$$
   $$= \langle \hat{P}_W v + (\hat{I} - \hat{P}_W)v, \hat{P}_W w\rangle = \langle v, \hat{P}_W w\rangle,$$
   dus $\hat{P}_W$ is een orthogonale projectie operator. $\Leftarrow$ als de orthogonale projector $\hat{P}$ gegeven is en dat $\hat{P}^2 = \hat{P}$ toont direct aan dat
   $$V = \mathrm{im}(\hat{P}) \oplus \ker(\hat{P}).$$

2. **Gesloten deelruimtes**

   - **gesloten deelruimte** $\ker(\hat{P})$
     $\hat{P}$ is continue dus $\ker(\hat{P})$ is een gesloten deelruimte van V. Als $(v_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ een sequentie is dat convergeert naar $v_n \to v \in V$, waar elke $v_n \in \ker(\hat{P})$, dan vinden we
     $$\lim_{n\to\infty} \hat{P}(v_n) = 0 = \hat{P}(\lim_{n\to\infty} v_n) = \hat{P}(v),$$
     zodanig dat $v \in \ker(\hat{P})$.
   - **gesloten deelruimte** $\mathrm{im}(\hat{P})$
     Voor elke $u \in \ker(\hat{P})$ en $w \in \mathrm{im}(\hat{P})$, met $w = \hat{P}v$ voor een arbitraire $v \in V$, vinden we:
     $$\langle w, u\rangle = \langle \hat{P}v, u\rangle = \langle v, \hat{P}u(=0)\rangle = 0,$$
     zodaning dat $\mathrm{im}(\hat{P}) \perp \ker(\hat{P})$, en de directe som decompositie gedefinieerd door $\hat{P}$ orthogonaal is. We bekomen dus $\mathrm{im}(\hat{P}) = \ker(\hat{P})^\perp$ en omgekeerd, wat betekent dat $\mathrm{im}(\hat{P})$ ook een gesloten deelruimte is.

$\square$

5.6 Orthogonale projectie in som van eenheidsvectoren (Lemma 5.21.)

Gegeven een Hilbertruimte V met een inwendig product $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en een deelruimte W die opgespannen wordt door de verzameling van orthonormale vectoren $\{e_1, \dots, e_n\}$. Toon aan dat de orthogonale projectie van een vector v op de deelruimte W gegeven wordt door:

$$P_W(v) = \sum_{i=1}^{n} e_i \langle e_i, v \rangle.$$

(Gebaseerd op *Lemma 5.21*)

Bewijs. Een algemene vector $\vec{w} \in W_n$ heeft een unieke uitbreiding $\vec{w} = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{e_i}$ vanwege de lineaire onafhankelijkheid van de vectoren $\vec{e_i}$. De orthogonale projectie wordt uniek gekarakteriseerd als de vector $\vec{w} \in W_n$ die $\|\vec{v} - \vec{w}\|$ minimaliseert.

Om $\vec{w}$ te bepalen, moet de volgende uitdrukking dus geminimaliseerd worden.

$$\begin{aligned} 0 \leq \left\| \vec{v} - \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{e_i} \right\|^2 &= \|\vec{v}\|^2 + \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 - \sum_{i=1}^{n} (\overline{a_i} \langle \vec{e_i}, \vec{v} \rangle + a_i \langle \vec{v}, \vec{e_i} \rangle) \\ &= \|\vec{v}\|^2 + \sum_{i=1}^{n} |a_i - \langle \vec{e_i}, \vec{v} \rangle|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\langle \vec{e_i}, \vec{v} \rangle|^2 \end{aligned}$$

De laatste uitdrukking geeft aan dat $\|\vec{v} - \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{e_i}\|$ minimaal is als $a_i = \langle \vec{e_i}, \vec{v} \rangle$, wat leidt tot de uitdrukking voor $\vec{v_n}$.

□

5.7 Ongelijkheid van Bessel (Lemma 5.22)

Gegeven een Hilbertruimte V met een inwendig product $\langle\cdot,\cdot\rangle$ en bijbehorende norm $\|v\|^2 = \langle v, v\rangle$, alsook een verzameling orthonormale vectoren $\{e_i, i = 1,\dots,n\}$ in V (die niet noodzakelijk een complete set vormen). Toon de ongelijkheid van Bessel aan:

$$\|v\|^2 \geq \sum_{i=1}^{n} |\langle e_i, v\rangle|^2.$$

(Gebaseerd op *Lemma 5.22*)

Bewijs. Voor het gemak duiden we de partiële sommen $\sum_{i=1}^{n}|\langle\vec{e_i},\vec{v}\rangle|^2$ aan als $t_n = \sum_{i=1}^{n}|\langle\vec{e_i},\vec{v}\rangle|^2$.

Uit **Lemma 5.21** (vorige bewijs) volgt direct Bessels ongelijkheid $t_n \leq \|v\|^2$. In de afleiding hadden we immers al bekomen dat

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|\vec{v}\|^2 - \sum_{i=1}^{n}|\langle\vec{e_i},\vec{v}\rangle|^2 \\ &= \|\vec{v}\|^2 - t_n \end{aligned}$$

waaruit Bessels ongelijkheid $t_n \leq \|v\|^2$ volgt.

Nu moet er nog aangetoond worden dat de reeks $t_n = \sum_{i=1}^{n}|\langle\vec{e_i},\vec{v}\rangle|^2$ convergeert. Omdat de rij van partiële sommen $(t_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ **monotoon stijgend** is (elke extra term $|\langle\vec{e_i},\vec{v}\rangle|^2$ is niet-negatief) en **bovenbegrensd** door $\|v\|^2$, moet deze convergeren. □

5.8 Voor geïnduceerde norm geldt $\|\hat{A}^\dagger\hat{A}\| = \|\hat{A}\|^2$ (Proposition 5.29.)

Gegeven Hilbertruimtes V en W met bijbehorend inwendig product en norm, alsook een begrensde lineaire afbeelding $\hat{A} \in$ Hom(V,W) met geïnduceerde norm:

$$\|\hat{A}\| = \sup_{v\in V, w\in W, v\neq 0, w\neq 0} \frac{|\langle w, \hat{A}v\rangle_W|}{\|w\|_W\|v\|_V}.$$

Toon aan dat $\|\hat{A}^\dagger\hat{A}\| = \|\hat{A}\|^2$, waarbij je mag aannemen dat de geïnduceerde norm voldoet aan $\|\hat{A}\hat{B}\| \leq \|\hat{A}\|\|\hat{B}\|$. (Gebaseerd op *Proposition 5.29.*)

Bewijs. We kunnen gebruik maken van de submultiplicativiteit van de norm, hierdoor is:

$$||A^\dagger A|| \leq ||A||\ ||A^\dagger|| = ||A^2||$$

nu hebben we ook nog via de **ongelijkheid van Cauchy-Schwarz**:

$$||Av||^2 = \langle Av, Av\rangle = |\langle v, A^\dagger Av\rangle| \leq ||A^\dagger Av||\ ||v|| \Rightarrow ||A||^2 \leq ||A^\dagger A||$$

deze twee ongelijkheden combineren en je hebt

$$||AA^\dagger|| = ||A||^2$$

en als we het bewijs nog eens doen, maar we vervangen A met $A^\dagger$ hebben we uiteindelijk dat:

$$||AA^\dagger|| = ||A^\dagger A|| = ||A^2||$$

□

5.9 Voor een lineaire afbeedling $\hat{A}$, geldt im$(\hat{A})^{\perp} = \ker(\hat{A}^{\dagger})$ (Proposition 5.30)

Gegeven Hilbertruimtes V en W met bijbehorend inwendig product en norm, alsook een begrensde lineaire afbeelding $\hat{A} \in$ Hom(V, W). Toon aan dat im$(\hat{A})^{\perp} =$ $\ker(\hat{A}^{\dagger})$. (Gebaseerd op *Proposition 5.30*)

Bewijs. Veronderstel elke $\vec{w} = \hat{A}\vec{v} \in im(\hat{A})$ voor een $\vec{v} \in V$. Vervolgens nemen we $\vec{u} \in ker(\hat{A}^{\dagger})$. We kunnen $ker(\hat{A}^{\dagger})$ als volgt definiëren:

$$ker(\hat{A}^{\dagger}) = \{\vec{a} \in W | \hat{A}^{\dagger}\vec{a} = \vec{0}\} \tag{29}$$

We nemen vervolgens het inwendige product van $\vec{w}$ en $\vec{u}$ en maken gebruik van de definitie van $\hat{A}^{\dagger}$ en van de definitie van $ker(\hat{A}^{\dagger})$ (zie 29):

$$\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle = \langle \hat{A}\vec{v}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{v}, \hat{A}^{\dagger}\vec{u} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{0} \rangle = 0 \tag{30}$$

Om 30 te kunnen interpreteren voeren we de definities van $im(\hat{A})$ en $im(\hat{A})^{\perp}$ in:

$$im(\hat{A}) = \{\hat{A}\vec{b} | \vec{b} \in V\} \tag{31}$$

$$im(\hat{A})^{\perp} = \{y \in W | \langle \vec{y}, \vec{w} \rangle = 0, \forall \vec{w} \in im(\hat{A})\} \tag{32}$$

Omdat in 30 het inproduct $\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle$ gelijk is aan nul, weten we dus dat:

$$\vec{u} \in im(\hat{A})^{\perp} \tag{33}$$

Maar ook als $\vec{u}$ geen element is van $ker(\hat{A}^{\dagger})$ zal het inproduct 30 gelijk zijn aan nul zolang $\vec{u}$ een element blijft van $im(\hat{A})^{\perp}$. Hieruit kunnen we dus halen dat:

$$ker(\hat{A}^{\dagger}) \preceq im(\hat{A})^{\perp} \tag{34}$$

Omgekeerd, neem $\vec{u} \in \mathrm{im}(\hat{A})^{\perp}$. Voor alle $\vec{v} \in V$ geldt:

$$\langle \hat{A}\vec{v}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{v}, \hat{A}^{\dagger}\vec{u} \rangle = 0 \tag{35}$$

Vergelijking 35 kan alleen maar gelden als $\hat{A}^{\dagger}\vec{u} = 0$, wat ons leert dat:

$$ker(\hat{A}^{\dagger}) \succeq im(\hat{A})^{\perp} \tag{36}$$

Zo komen we tot de conclusie uit 36 en 34 dat $im(\hat{A})^{\perp} = ker(\hat{A}^{\dagger})$. □

5.10 Isometrie voorwaarde is voldaan voor normaal operator (Proposition 5.31)

Beschouw een begrensde lineaire afbeelding $\hat{A} \in \mathbf{Hom}(V, W)$ tussen de inwendig productruimtes $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$ en $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$. We kunnen dan de norm en daaruit de afstandsfunctie (metriek) $d_W(w, w') = \|w - w'\|_W$ voor alle $w, w' \in W$ en analoog $d_V(v, v') = \|v - v'\|_V$ voor alle $v, v' \in V$ invoeren. Toon aan dat de isometrie-voorwaarde $d_W(\hat{A}v, \hat{A}v') = d_V(v, v') = \|v - v'\|_V$ voor alle $v, v' \in V$ voldaan is als en slechts als $\hat{A}^\dagger\hat{A} = \hat{1}_V$.

(Gebaseerd op *Proposition 5.31*)

Bewijs. We moeten aantonen dat $||Av - Av'||_W = ||v - v'||_V$ geldt als en slechts als $A^\dagger A = 1_V$:

1. stel eerst dat $||Av - Av'||_W = ||v - v'||_V$ waar is en dat we moeten aantonen dat $A^\dagger A = 1_V$

$$||Av - Av'||_W = ||v - v'||_V$$

dit is het zelfde als zeggen dat de norm in v en w hetzelfde is dus we kunnen dit vervangen door te schrijven:

$$||Av||_W = ||v||_V$$

nu tonen we eerst aan dat door normbehoud ook het inproduct hetzelfde is dus $\langle Av, Aw\rangle_W = \langle v, w\rangle_V$ voor verwarring te voorkomen $v, w \in V$
omdat normbehoud voor elke vector v geldt introduceren we een nieuwe vector $x = v + aw$ met $a \in F$ dit in $||Av||_W = ||v||_V$ deze vergelijking steken:

$$||A(v + aw)||_W = ||v + aw||_V$$

bijde leden kwadrateren en inproduct uitwerken
LL:

$$||A(v+aw)||_W^2 = \langle Av+aAw, Av+aAw\rangle_W = \langle Av, Av\rangle + a\langle Av, Aw\rangle + \bar{a}\langle Aw, Av\rangle + |a|^2\langle Aw, Aw\rangle$$

en het rechter lid wordt:

$$||v + aw||_V^2 = \langle v + aw, v + aw\rangle_V = \langle v, v\rangle + a\langle v, w\rangle + \bar{a}\langle w, v\rangle + |a|^2\langle w, w\rangle$$

dan hebben we uiteindelijk:

$$\langle Av, Av\rangle + a\langle Av, Aw\rangle + \bar{a}\langle Aw, Av\rangle + |a|^2\langle Aw, Aw\rangle = \langle v, v\rangle + a\langle v, w\rangle + \bar{a}\langle w, v\rangle + |a|^2\langle w, w\rangle$$

en omdat dit voor alle $a \in F$ moet gelden is:

$$\langle Av, Aw\rangle = \langle v, w\rangle$$

en dan is:

$$\langle v, A^\dagger Aw\rangle = \langle v, w\rangle$$

omdat deze gelijkheid moet gelden voor alle $v, w \in V$ is $A^\dagger A = 1_V$
2. omgekeerd stel $A^\dagger A = 1_V$ dan is:

$$||Av||_W^2 = \langle Av, Av\rangle_W = \langle v, A^\dagger Av\rangle_V = \langle v, v\rangle_V = ||v||_V^2$$

hiervan de vierkantswortel nemen en we komen uit dat A isometrisch is. □

5.11 Een zelftoegevoegde operator $\hat{A}$ heeft reëele eigenwaarden (Remark 5.46.)

Beschouw een (begrensde) lineaire operator $\hat{A} \in \mathbf{End}(V)$ op een Hilbertruimte $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ die zelftoegevoegd is: $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$. Als $\hat{A}$ een eigenvector v heeft met eigenwaarde λ, toon dan aan dat λ reëel is. (Gebaseerd op *Remark 5.46.*)

Bewijs. We moeten aantonen dat $\lambda \in \mathbb{R}$ met λ een eigenwaarde van A:
we hebben dus eerst en vooral $Av = \lambda v$, maar ook $A^\dagger v = \bar{\lambda}$ en $A^\dagger = A$
als we deze drie eigenschappen combineren krijgen we:

$$\bar{\lambda} v = A^\dagger v = Av = \lambda v$$

en omdat v niet perse de nul vector is moet:

$$\bar{\lambda} = \lambda$$

stel nu $\lambda = a + bi$ dan is:

$$a - bi = a + bi \Rightarrow 2bi = 0 \Rightarrow b = 0$$

dus de eigenwaarden zijn rëeel. $\square$

5.12 Operator $\hat{A}$ is normaal $\iff \|\hat{A}v\| = \|\hat{A}^\dagger v\|$ (Proposition 5.34) (!)

Beschouw een (begrensde) lineaire operator $\hat{A} \in \mathbf{End}(V)$ op een Hilbertruimte $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Toon aan dat $\hat{A}$ normaal is, i.e., $\hat{A}\hat{A}^\dagger = \hat{A}^\dagger\hat{A}$, als en slechts als voldaan is aan $\|\hat{A}v\| = \|\hat{A}^\dagger v\|$ voor alle $v \in V$.

LET OP: dit was een vraag op het theorie-examen, 1^e zit academiejaar 2024-2025 !!
(Gebaseerd op *Proposition 5.34*)

Bewijs. we moeten aantonen dat $AA^\dagger = A^\dagger A$ als en slechts als $||Av|| = ||A^\dagger v||$
we tonen eerst $AA^\dagger = A^\dagger A \Rightarrow ||Av|| = ||A^\dagger v||$ aan:

$$||Av||^2 = \langle Av, Av\rangle = \langle v, A^\dagger Av\rangle = \langle v, AA^\dagger v\rangle = \langle A^\dagger v, A^\dagger v\rangle = ||A^\dagger v||^2$$

en nu nog de ander kant $AA^\dagger = A^\dagger A \Leftarrow ||Av|| = ||A^\dagger v||$

$$0 = ||Av||^2 - ||A^\dagger v||^2 = \langle Av, Av\rangle - \langle A^\dagger v, A^\dagger v\rangle = \langle v, A^\dagger Av\rangle - \langle v, AA^\dagger v\rangle = \langle v, A^\dagger A - AA^\dagger v\rangle$$

nu tonen we aan dat $0 = \langle v, A^\dagger A - AA^\dagger v\rangle \Rightarrow \langle v, (A^\dagger A - AA^\dagger)w\rangle = 0$ omdat de gelijkheid $0 = \langle v, A^\dagger A - AA^\dagger v\rangle$ waar is voor alle $v \in V$ kunnen we dit ook doen voor een vector $v + aw$ met $v, w \in V$ het inproduct wordt dan:

$$0 = \langle v + aw, (A^\dagger A - AA^\dagger)(v + aw)\rangle$$

dit dan uitwerken:

$$0 = \langle v, A^\dagger A - AA^\dagger v\rangle + \bar{a}\langle w, (A^\dagger A - AA^\dagger)v\rangle + a\langle v, (A^\dagger A - AA^\dagger)w\rangle + a\bar{a}\langle w, (A^\dagger A - AA^\dagger)w\rangle$$

de eerste en de laatste term zijn nul door $0 = \langle v, A^\dagger A - AA^\dagger v\rangle$ voor alle $v, w \in V$
de 2de term kunnen we herschrijven als:

$$\begin{aligned}&\bar{a}\langle w, (A^\dagger A - AA^\dagger)v\rangle = \bar{a}\overline{\langle (A^\dagger A - AA^\dagger)v, w\rangle} = \overline{a\langle (A^\dagger A - AA^\dagger)v, w\rangle}\\ &= \overline{a\langle v, (A^\dagger A - AA^\dagger)^\dagger w\rangle} = \overline{a\langle v, (A^\dagger A - AA^\dagger)w\rangle}\end{aligned}$$

waarbij de laatste stap werkt door dat $A^\dagger A - AA^\dagger$ een hermetische operator is
dan vullen we dit terug in de vgl:

$$0 = \overline{a\langle v, (A^\dagger A - AA^\dagger)w\rangle} + a\langle v, (A^\dagger A - AA^\dagger)w\rangle = 2Re(a\langle v, (A^\dagger A - AA^\dagger)w\rangle)$$

en als we nu $a = \overline{\langle v, (A^\dagger A - AA^\dagger)w\rangle}$ stellen:

$$0 = Re(|\langle v, (A^\dagger A - AA^\dagger)w\rangle|^2) = |\langle v, (A^\dagger A - AA^\dagger)w\rangle|^2 \Rightarrow \langle v, (A^\dagger A - AA^\dagger)w\rangle = 0$$

en dit is nul voor alle $v, w \in V$
Omdat dit nul is voor het algemeen inproudct $\Rightarrow A^\dagger A = AA^\dagger$ $\square$

5.13 Eigenvectoren bij $\hat{A}$, zijn dit ook bij $\hat{A}^\dagger$ (!)

Beschouw een (begrensde) lineaire operator $\hat{A} \in \mathrm{End}(V)$ op een Hilbertruimte $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ die normaal is, i.e., $\hat{A}\hat{A}^\dagger = \hat{A}^\dagger\hat{A}$. Gegeven een eigenvector v van $\hat{A}$ met eigenwaarde λ. Is v ook een eigenvector van $\hat{A}^\dagger$?
LET OP: dit was een vraag op het theorie-examen, 1^e zit academiejaar 2024-2025 !!

Bewijs. We moeten aantonen dat als v een eigenvector is van A en $A^\dagger A = AA^\dagger$ dan is v ook een eigenvector van $A^\dagger$
We weten dat $Av = \lambda v$ hiervan de norm nemen:

$$||(A-\lambda)v|| = 0 = ||(A-\lambda)^\dagger v|| = ||(A^\dagger - \bar{\lambda})v||$$

waarbij we gebruik gemaakt hebben van het feit dat $||Av|| = ||A^\dagger v||$ als $A^\dagger A = AA^\dagger$
we zien dat $A^\dagger v = \bar{\lambda} v$ en dus dat v ook een eigenvector is van $A^\dagger$ □

5.14 Ontbind $\hat{A} = \hat{A}_1 + i\hat{A}_2$ (Remark 5.56) (!)

Beschouw een (begrensde) lineaire operator $\hat{A} \in \mathrm{End}(V)$ op een Hilbertruimte $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ die normaal is, i.e., $\hat{A}\hat{A}^\dagger = \hat{A}^\dagger\hat{A}$. Ontbind $\hat{A} = \hat{A}_1 + i\hat{A}_2$ zodanig dat $\hat{A}_1$ en $\hat{A}_2$ zelftoegevoegd zijn: druk $\hat{A}_1$, $\hat{A}_2$ uit in termen van $\hat{A}$. Wat kan je zeggen over $[\hat{A}_1, \hat{A}_2]$? Gegeven een eigenvector v van $\hat{A}$ met eigenwaarde λ. Is v ook een eigenvector van $\hat{A}_1$ en $\hat{A}_2$, en indien zo, wat zijn de bijbehorende eigenwaarden?(Gebaseerd op *Remark 5.56*)
LET OP: dit was een vraag op het theorie-examen, 1^e zit academiejaar 2024-2025 !!

Bewijs. We beantwoorden de eerste vraag decomposeer A in $A_1 + iA_2$ waarbij A_1 en A_2 zelftoegevoed zijn:

$$A = \frac{A + A^\dagger}{2} + \frac{A - A^\dagger}{2} = \frac{A + A^\dagger}{2} + i\frac{A - A^\dagger}{2i}$$

$$A_1^\dagger = \frac{A^\dagger + A}{2} = A_1$$

$$A_2^\dagger = \frac{A^\dagger - A}{-2i} = \frac{A - A^\dagger}{2i} = A_2$$

2de vraag wat is $[A_1, A_2]$ als A normaal is:

$$[A_1, A_2] = A_1A_2 - A_2A_1 = \frac{A + A^\dagger}{2} \cdot \frac{A - A^\dagger}{2i} - \frac{A - A^\dagger}{2i} \cdot \frac{A + A^\dagger}{2} =$$

$$\frac{A^2 - AA^\dagger + A^\dagger A - (A^\dagger)^2 - (A^2 + AA^\dagger - A^\dagger A - (A^\dagger)^2)}{4i} = \frac{-2AA^\dagger + 2A^\dagger A}{4i} = 0$$

de laatste stap is door dat A normaal is. De **3de vraag** is stel dat v een eigenvector van A is v dan ook een eigen vector van A_1 en A_2. We weten dat $Av = \lambda v$ en $A^\dagger v = \bar{\lambda} v$ deze laatste gelijkheid met $A^\dagger$ is alleen waar als A normaal is:

$$A_1 v = \frac{A + A^\dagger}{2} v = \frac{Av + A^\dagger v}{2} = \frac{\lambda v + \bar{\lambda} v}{2} = \frac{\lambda + \bar{\lambda}}{2} v = Re(\lambda) v$$

in de laatste stap werd gebruik gemaakt van $a + bi + a - bi = 2a$ en voor A_2:

$$A_2 v = \frac{A - A^\dagger}{2i} v = \frac{Av - A^\dagger v}{2i} = \frac{\lambda v - \bar{\lambda} v}{2i} = \frac{\lambda - \bar{\lambda}}{2i} v = Im(\lambda) v$$

in de laatste stap werd gebruik gemaakt van $a + bi - a + bi = 2bi$.
De eigenvector van A is dus ook een eigenvector van A1 en A2 □

5.15 Voor een normaal operator geldt $\|\hat{A}\| = \rho_{\hat{A}}$ (Corollary 5.38)

Beschouw een (begrensde) lineaire operator $\hat{A} \in \mathbf{End}(V)$ op een Hilbertruimte $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ die normaal is, i.e., $\hat{A}\hat{A}^\dagger = \hat{A}^\dagger\hat{A}$. Toon aan dat, met behulp van de geïnduceerde operatornorm

$$\|\hat{A}\| = \sup_{v\in V, v\neq 0} \frac{\|\hat{A}v\|}{\|v\|_V},$$

voldaan is aan $\|\hat{A}\| = \rho_{\hat{A}}$, met hierin $\rho_{\hat{A}} = \lim_{n\to\infty} \|\hat{A}^n\|^{1/n}$ de spectraalstraal, geschreven met behulp van Gelfand's formule. (Gebaseerd op *Corollary 5.38*)

Bewijs. **(1)** Als $\hat{A}$ een normale operator is ($A^\dagger A = AA^\dagger$) dan geldt voor de geïnduceerde operatornorm dat

$$\|\hat{A}^n\| = \|\hat{A}\|^n$$

De gevallen voor $n = 0$ en 1 volgen triviaal. Het geval voor $n = 2$ bekomt men ook makkelijk door $\|\hat{A}^2\mathbf{v}\| = \|\hat{A}(\hat{A}\mathbf{v})\| = \|\hat{A}^\dagger\hat{A}\mathbf{v}\| \geq \langle\mathbf{v}, \hat{A}^\dagger\hat{A}\mathbf{v}\rangle = \|\hat{A}\|^2$ (gebruik makende van Cauchy-Schwarz en voor elke vector $\mathbf{v}$ met normalisatie $\|\mathbf{v}\| = 1$ gekozen). Voor de andere n bewijzen we via inductie.

Er geldt $\|\hat{A}^n\| \leq \|\hat{A}\|^n$ door submultiplicativiteit.

Het geval $\|\hat{A}^n\| \geq \|\hat{A}\|^n$ wordt nu bewezen:

$$\|\hat{A}^{n+1}\mathbf{v}\| = \left\|\hat{A}^n \frac{\hat{A}\mathbf{v}}{\|\hat{A}\mathbf{v}\|}\right\| \|\hat{A}\mathbf{v}\| \geq \left\|\hat{A} \frac{\hat{A}\mathbf{v}}{\|\hat{A}\mathbf{v}\|}\right\|^n \|\hat{A}\mathbf{v}\| = \|\hat{A}^2\mathbf{v}\|^n \|\hat{A}\mathbf{v}\|^{1-n} = \|\hat{A}\mathbf{v}\|^{n+1}$$

in de laatste stap hebben we gebruik gemaakt van het feit dat $\|\hat{A}^2\mathbf{v}\| = \|\hat{A}\mathbf{v}\|^2$ (daarnet bewezen).

(2) Nu kunnen we makkelijk het gevraagde bewijzen, want:

$$\|\hat{A}\|^n = \|\hat{A}^n\|$$
$$\Downarrow$$
$$\|\hat{A}\| = \lim_{n\to\infty} \|\hat{A}^n\|^{1/n} = \rho_{\hat{A}}$$

□

5.16 Een normaal operator kan niet nilpotent zijn (Corollary 5.39.)

Beschouw een (begrensde) lineaire operator $\hat{A} \in \mathbf{End}(V)$ op een Hilbertruimte $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ die normaal is, i.e., $\hat{A}\hat{A}^\dagger = \hat{A}^\dagger\hat{A}$. Toon aan dat $\hat{A}$ niet nilpotent kan zijn. (Gebaseerd op *Corollary 5.39.*

Bewijs. Eerst tonen we aan dat een normaal operator niet nilpotent kan zijn voor index $s = 2$. Inderdaad, veronderstel dat $\hat{A}^2 = 0$. Voor elke vector $\vec{v} \in V$, zullen we vinden dat $0 = ||\hat{A}^2\vec{v}|| = ||\hat{A}^\dagger\hat{A}\vec{v}||$, en dus $\hat{A}^\dagger\hat{A}\vec{v} = 0$. Maar dit betekend dat $\langle\vec{v}, \hat{A}^\dagger\hat{A}\vec{v}\rangle = ||\hat{A}\vec{v}||^2 = 0$, zodat $\hat{A}\vec{v} = 0$ voor alle $\vec{v} \in V$, en dus dat $\hat{A} = \hat{0}$. Een normaal operator $\hat{A}$ is nilpotent met een index $s > 2$ is ook niet mogelijk omdat $\hat{A}^{s-1}$ ook een normaal operator met index 2 zou zijn. $\square$

6 Unitaire Gelijkvormigheid en Unitaire Equivalentie

6.1 $U = \exp(A)$ is unitaire als A anti-hermitisch is

Gegeven een matrix $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Onder welke voorwaarden op A is $U = \exp(A)$ een unitaire matrix?

Bewijs. We willen voorwaarden zoeken waarvoor U = exp(A) unitair is, anders geschreven is dit $UU^H = I = U^H U$. Gegeven is dus dat:

$$U = exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

Omdat het hermitisch toegevoegde een lineaire operator is, volgt:

$$U^H = (exp(A))^H = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}\right)^H = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A^H)^n}{n!} = exp(A^H)$$

We willen dat $UU^H = I = U^H U$ dus:

$$e^A \cdot e^{A^H} = I$$

$$\Downarrow$$

$$e^{A^H} = (e^A)^{-1} = e^{-A}$$

We vinden dus dat de voorwaarde voor a $A^H = -A$ is, deze eigenschap heet anti-hermitisch. $\square$

6.2 Wat is $\det(\exp(A))$, voor $A^T = -A$

Gegeven een matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die voldoet aan $A^T = -A$. Wat weet je over $\det(\exp(A))$?

Bewijs. We weten dat $A^T = -A$ ofwel, een anti-symmetrische matrix. Er moet een uitdrukking gevonden worden voor det(exp(A)). Uit Remark 3.52 weten we dat $det(exp(A)) = exp(tr(A))$. Er volgt dus dat:

$$tr(-A) = tr(A^T) = tr(A)$$

$$\Downarrow$$

$$tr(A) = 0$$

Hierbij werd de eigenschap van anti-symmetrische matrices gebruikt en het feit dat de diagonaalelementen niet veranderen bij transponeren. Omdat $tr(-A) = -tr(A)$ volgt de laatste gelijkheid.

We vinden hieruit dat:

$$det(exp(A)) = exp(tr(A)) = exp(0) = 1$$

$\square$

6.3 Eigenwaarden en vectoren voor een circulante matrix (Proposition 6.2)

Beschouw een circulante matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, i.e. $A_{ij} = f((j-i) \mod n)$ met $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1} \in \mathbb{C}$. Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van A.

(Gebaseerd op *Proposition 6.2*)

Bewijs. We kunnen de elementen van een circulante matrix A schrijven als $A^i_j = f_{(j-i) \mod n}$. Als $\vec{u_k} = (\frac{\omega^{kj}}{\sqrt{n}})_{j=0,\ldots,n-1}$, dan is:

$$\begin{aligned}(A\vec{u_k})^i &= \sum_{j=0}^{n-1} A^i_j \frac{\omega^{kj}}{\sqrt{n}} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (f_{(j-i) \mod n}) \frac{\omega^{k(j-i+i)}}{\sqrt{n}} \\ &= \frac{\omega^{ki}}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} (f_{(j-i) \mod n}) \omega^{k(j-i)}\end{aligned}$$

Waarbij $\sum_{j=0}^{n-1}(f_{(j-i) \mod n})\omega^{k(j-i)} \in \mathbb{C}$ en $(\vec{u_k})^i = \frac{\omega^{ki}}{\sqrt{n}}$. Dus kan het bovenstaande herschreven worden als:

$$(A\vec{u_k})^i = \frac{\omega^{ki}}{\sqrt{n}} \cdot \left(\sum_{j=0}^{n-1} (f_{(j-i) \mod n}) \cdot \omega^{k(j-i)} \right) = (\vec{u_k})^i \cdot \lambda_k \tag{37}$$

Waarbij λ_k de eigenwaarden zijn voor A met de daarbij horende eigenvectoren:

$$\vec{u_k} = \left(\frac{\omega^{kj}}{\sqrt{n}} \right)_{j=0,\ldots,n-1} \tag{38}$$

□

Merk op dat $\vec{u_k}$ de kolommen zijn van de Fourier transformatiematrix $U \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Elke circulante matrix A kan dus gediagonaliseerd worden door $\Lambda = UAU^{-1} = UAU^H$. Λ is een diagonaalmatrix met als elementen de eigenwaarden λ_k.

6.4 Schurdecompositie (Theorem 6.3)

Toon aan dat elke matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ een Schurdecompositie $A = ZTZ^H$ heeft, waarbij $Z \in \mathbb{C}^{n \times n}$ unitair is en $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ een bovendriehoeksmatrix ($T_{ij} = 0$ als $i > j$) is. (Gebaseerd op *Theorem 6.3*)

Bewijs. We willen bewijzen dat voor elke $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ geldt dat $A = ZTZ^H$ waarbij Z een unitaire matrix is ($Z^H = Z^{-1}$) en T een bovendriehoeksmatrix. We bewijzen dit via **inductie**.

Voor $n = 1$ geld dit triviaal voor $Z = I$ en $T = A$.

We stellen nu dat dit ook geldt voor alle matrices $\tilde{A} \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$ en dan kijken we of dit voldaan is voor $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

Omdat A een eindig dimensionale matrix is, heeft deze minstens 1 eigenwaarde λ waaraan 1 eigenvector $\vec{v}$ geassocieerd is. Deze vector kunnen we omzetten in een eenheidsvector $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ waarmee we een unitaire matrix U kunnen opstellen met $\vec{u}$ in de eerste kolom, $U = [\vec{u}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_n}]$ waarbij de vectoren $\{\vec{u}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_n}\}$ een basis vormen voor $\mathbb{C}^n$.

Nu kunnen we A vermenigvuldigen met U zodat $AU = [A\vec{u}, A\vec{v_2}, ..., A\vec{v_n}]$ met dus $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$. Nu valt elke Av_k te herschrijven als een lineaire combinatie van $\{u, v_2, ..., v_n\}$.

$$Av_k = c_{1,k}u + \sum_{j=2}^{n} c_{j,k}v_j, \quad \text{voor } k = 2, \dots, n$$

Hieruit volgt:

$$AU = \begin{bmatrix}\lambda u & Av_2 & \cdots & Av_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda u & c_{1,2}u + \sum_{j=2}^{n} c_{j,2}v_j & \cdots & c_{1,n}u + \sum_{j=2}^{n} c_{j,n}v_j\end{bmatrix}$$

Dit kan in matrixvorm geschreven worden:

$$\begin{bmatrix}\lambda u & c_{1,2}u + \sum_{j=2}^{n} c_{j,2}v_j & \cdots & c_{1,n}u + \sum_{j=2}^{n} c_{j,n}v_j\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}u & v_2 & \cdots & v_n\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\lambda & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n} \\ 0 & c_{2,2} & \cdots & c_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & c_{n,2} & \cdots & c_{n,n}\end{bmatrix}$$

Tenslotte weten we dat $\begin{bmatrix}u & v_2 & \cdots & v_n\end{bmatrix} = U$, dus vinden we:

$$AU = U \begin{bmatrix}\lambda & \cdots \\ O_{(n-1)\times 1} & \tilde{A}\end{bmatrix}$$

We stelden dat de Schur decompositie geldt voor $\tilde{A} \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$, dus $\tilde{A} = \tilde{Z}\mathrm{T}\tilde{Z}^H$. Dus volgt dat de Schur decompositie ook geld voor A, namelijk:

$$A = U \begin{bmatrix}1 & O_{1\times(n-1)} \\ O_{(n-1)\times 1} & \tilde{Z}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\lambda & \cdots \\ O_{(n-1)\times 1} & \tilde{T}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1 & O_{1\times(n-1)} \\ O_{(n-1)\times 1} & \tilde{Z}^H\end{bmatrix} U^H$$

$$= ZTZ^H$$

Waarbij $Z = U \begin{bmatrix}1 & O_{1\times(n-1)} \\ O_{(n-1)\times 1} & \tilde{Z}\end{bmatrix}$ unitair en $T = \begin{bmatrix}\lambda & \cdots \\ O_{(n-1)\times 1} & \tilde{T}\end{bmatrix}$ een bovendriehoeksmatrix. $\square$

6.5 Diagonalisatie met unitaire transformaties (Proposition 6.4)

Gegeven een normale matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Toon aan dat A gediagonaliseerd kan worden via een unitaire transformatie, i.e. $A = UDU^H$ met $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitair en $D \in \mathbb{C}^{n\times n}$ diagonaal ($D_{ij} = 0$ als $i \neq j$). Het bestaan van de Schurdecompositie zoals uit de vorige vraag kan je hierbij aannemen. (Gebaseerd op *Proposition 6.4*)

Bewijs. We weten dat $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ een normale matrix is (dus $A^H A = AA^H$, en de eigenvectoren staan onderling orthogonaal). We vinden hierbij de Schur decompositie $A = UTU^H$ met U unitair ($U^H U = UU^H = I$), waarbij moet gelden dat $(UTU^H)^H UTU^H = UTU^H(UTU^H)^H$, hieruit volgt:

$$UT^H U^H UTU^H = UTU^H UT^H U^H \Rightarrow T^H T = TT^H$$

Omdat T een bovendriehoeksmatrix is, vinden we dat T ook een diagonaalmatrix moet zijn. Dit volgt uit het feit dat de niet diagonaalelementen van $T^H T$ zouden verschillen van de niet diagonaalelementen van TT^H. Dit is het geval omdat:

$$T^H T = (T^T)^* T = T(T^T)^* \Rightarrow (T^*)^T T = T(T^*)^T$$

Wat enkel geldt als T symmetrish is, dus moet $T = D$ een diagonaalmatrix zijn. Hieruit volgt dus dat elke normale matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ kan geschreven worden als:

$$A = UDU^H$$

□

6.6 Vereenvoudiging van symmetrische bilineaire vorm (Propositie 6.6)

Gegeven de matrixrepresentatie $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ van een symmetrische bilineaire vorm

$$B(v, w) = v_i B_{ij} w_j.$$

Onder een basistransformatie $\tilde{v} = Tv$ transformeert B naar

$$\tilde{B} = T^{-T} B T^{-1},$$

met $T^{-T} = (T^{-1})^T = (T^T)^{-1}$. Wat is de eenvoudigste vorm waartoe je $\tilde{B}$ kan herleiden door een goedgekozen basistransformatie T en leg uit hoe je deze vorm kunt vinden.(niet verbeterd) (Gebaseerd op *Propositie 6.6*)

Bewijs. Gegeven is een symmetrische matrix B. Geweten is bij symmetrische matrices dat er een orthogonale matrix Q bestaat waardoor ze gediagonaliseert wordt[1]. Een orthogonale matrix voldoet aan de eigenschap $QQ^T = Q^TQ = I$.

We hebben dus dat B congruent is met:

$$QBQ^T = D$$

Met D een diagonale matrix $diag(d_1, d_2, \ldots, d_n)$.
Definiëer nu de diagonale matrix $S = diag(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, met s_k gegeven door:

$$s_k = \begin{cases} 1/\sqrt{d_k} & \text{als } d_k > 0, \\ 1/\sqrt{-d_k} & \text{als } d_k < 0, \\ 1 & \text{als } d_k = 0. \end{cases}$$

Dan zal B ook congruent zijn met:

$$\begin{aligned} SQBQ^TS^T &= SDS^T \\ &= SDS = diag(\frac{d_1}{\sqrt{|d_1|}^2}, \frac{d_2}{\sqrt{|d_2|}^2}, \ldots, \frac{d_n}{\sqrt{|d_n|}^2}) \\ &= diag\left(sgn(d_1), sgn(d_2), \ldots, sgn(sgn(d_n)\right) \end{aligned}$$

In het rechterlid zien we dat de matrix SDS^T enkel de getallen 1, -1 en 0 heeft staan.

Stel nu dat we SQ schrijven als V, dan zijn de kolommen v_k van V gelijk aan:

$$v_k = \begin{cases} q_k/\sqrt{d_k} & \text{als } d_k > 0, \\ q_k/\sqrt{-d_k} & \text{als } d_k < 0, \\ q_k & \text{als } d_k = 0. \end{cases}$$

[1]Het is logisch dat Q orthogonaal moet zijn want $B = QDQ^{-1}$ en $B = B^T = Q^{-T}DQ^T = QDQ^T$. Dit kan enkel als $Q^T = Q^{-1}$.

met q_k de kolommen van Q.

Nu moeten we enkel nog de kolommen van beide leden zo omwisselen, zodat in het rechterlid een matrix wordt bekomen van de vorm $diag(1, 1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1, 0, \ldots, 0)$. Als finale vorm krijgen we dus iets van de vorm:

$$\begin{aligned} TBT^T &= diag(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1, 0, \ldots, 0) \\ &= \tilde{B} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$B = T^{-1}\tilde{B}T^{-T}$$

$\Longrightarrow$ De matrixrepresentatie B van een symmetrische bilineaire vorm B is congruent met een canonieke vorm gegeven door:

$$\tilde{B} = \mathrm{diag}(\underbrace{+1, \ldots, +1}_{n_+ \text{ keer}}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{n_- \text{ keer}}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n_0 \text{ keer}}).$$

$\square$

6.7 Verband tussen QR-ontbinding en SVD (Remark 6.40)

Gegeven een matrix $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ ($m \geq n$) en zijn "smalle" QR-ontbinding $A = QR$ met $Q \in \mathbb{F}^{m\times n}$ isometrisch en $R \in \mathbb{F}^{n\times n}$ een bovendriehoeksmatrix. Relateer de factoren in de "smalle" singuliere-waardenontbinding van A met de factoren van de voorgaande QR-ontbinding en de factoren uit de singuliere-waardenontbinding van R. (Gebaseerd op *Remark 6.40*)

Definitie 6.12. Als $m \neq n$, wordt een andere, maar equivalente decompositie van A gegeven door

$$A = U_k S_k V_k^H \quad \text{met} \quad k = \min(m, n),$$

de zogenaamde dunne singuliere-waardedecompositie.

Definitie 6.13. Als bovendien slechts $p < \min(m, n)$ singuliere waarden ongelijk aan nul zijn, wordt de decompositie

$$A = U_p S_p V_p^H$$

de compacte singuliere-waardedecompositie genoemd.

Bewijs. Als $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ niet vierkant is, bijvoorbeeld als $m > n$, kunnen we eerst een QR-decompositie van A berekenen en vervolgens de gegevens uit vorige bewijs gebruiken om de singuliere-waardedecompositie van de bovendriehoeksmatrix R te berekenen.

Dit kan je ook vrij vlot beredeneren, gebruik makende van het feit dat de compositie van twee isometrische matrices nog steeds isometrisch is:
dus $A = QR$ en $R = U_R S_R V_R^H$
$\implies A = (QU_R)S_R V_R^H = U_A S_A V_A^H$

is een manier om A te schrijven als het product van een isometrische matrix

$U_A = QU_R$
een diagonale matrix met niet-negatieve diagonaalelementen

$S_A = S_R$
en een isometrische matrix (hermitisch toegevoegd):

$V_A^H = V_R^H$ □

6.8 Explicitie conctructie van unitaire decompositie (Remark 6.39.)

Gegeven een matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ en zijn singuliere-waardenontbinding $A = USV^H$ met $U, V \in \mathbb{F}^{n\times n}$ unitair, en $S \in \mathbb{F}^{n\times n}$ diagonaal. Construeer de unitaire (!) matrix die de Hermitische matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & A^H \\ A & 0 \end{bmatrix}$$

diagonaliseert. Toon expliciet aan dat uw antwoord unitair is. Hierbij kan je gebruik maken van het bestaan van de singuliere-waardendecompositie $A = USV^H$. (Gebaseerd op *Remark 6.39.*)

Bewijs. Gegeven is de matrix $H = \begin{bmatrix} O & A^H \\ A & O \end{bmatrix}$ die hermitisch is, want:

$$\begin{aligned} H^H &= \begin{bmatrix} O & A^H \\ A & O \end{bmatrix}^H = \begin{bmatrix} O & (A)^H \\ (A^H)^H & O \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} O & A^H \\ A & O \end{bmatrix} = H \end{aligned}$$

Waarbij gegeven is dat de matrix A via singuliere-waardenontbinding kan ontbonden worden als $A = USV^H$, met U, V unitair ($U^H = U^{-1}$) en S een diagonaalmatrix.

Beschouw nu de unitaire matrix $T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} V & -V \\ U & U \end{bmatrix}$. Deze is unitair omdat

$$\begin{aligned} TT^H &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} V & -V \\ U & U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^H & U^H \\ -V^H & U^H \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2VV^H & VU^H - VU^H \\ UV^H - UV^H & 2UU^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ O & I \end{bmatrix} \end{aligned}$$

De matrixvermenigvuldiging HT is dan gelijk aan

$$\begin{aligned} HT &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} O & A^H \\ A & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V & -V \\ U & U \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} A^H U & A^H U \\ AV & -AV \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} VS & VS \\ US & -US \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} V & -V \\ U & U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S & O \\ O & -S \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Hierbij hebben we gebruik gemaakt van $A = USV^H$ en het feit dat $S = S^H$. De matrix $D = \begin{bmatrix} S & O \\ O & -S \end{bmatrix}$ is een diagonale matrix omdat S diagonaal is.

De hermitische matrix H kan dus gediagonaliseerd worden door de unitaire matrix T.

$$T^H HT = D$$

□

6.9 Oplossing van overgedetermineerd stelsel (Lineair Least Squares) (Proposition 6.13)

Gegeven de coëfficiëntenmatrix $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ van een lineair stelsel $Ax = y$ dat mogelijk overgedetermineerd is. Veronderstel in het bijzonder dat A geen volle rang heeft, i.e. rank$(A) = p < \min(m,n)$. Construeer een oplossing x die de norm van het residu $\|Ax - y\|$ (met de standaard Euclidische norm) minimaliseert. Is deze oplossing altijd uniek, en zo niet, kan je bijkomende voorwaarden opleggen op x om een unieke oplossing te krijgen?(Gebaseerd op *Proposition 6.13*)

Bewijs. Doordat A overgedetermineerd is (heeft dus mogelijks meer rijen of kolommen dan nodig) en er geen volle rank is, kunnen we niet simpelweg werken met het residual zoals vroeger geïntroduceerd: $r = y - Ax$, maar zullen we een alternatief via de least squares methode moeten zoeken. We noemen deze oplossing **x***.

We willen de minimale norm-oplossing x^* expliciet construeren. De verzameling L (gedefinieerd in definitie 6.16) bevat alle vectoren x die de norm van het residu minimaliseren:

$$L = \{x \in \mathbb{F}^n \mid \|Ax - y\|_2 = \min_{z\in\mathbb{F}^n} \|Az - y\|_2\}.$$

De residunorm $\|Ax-y\|_2$ wordt geminimaliseerd als Ax de orthogonale projectie van y is op im(A), de kolomruimte van A. Met de compacte SVD $A = U_p S_p V_p^H$ (hierin is U_p een matrix met orthonormale kolommen die de kolomruimte van A opspant, S_p een diagonaal matr'ix met de singuliere waarden van A en V_p de matrix met orthonormale kolommen die de rijruimte van A opspant), kunnen we de orthogonale projector schrijven als :

$$P_{\text{im}(A)} = U_p U_p^H.$$

Dit geeft:

$$Ax = U_p U_p^H y.$$

Omdat $A = U_p S_p V_p^H$, kunnen we schrijven:

$$S_p V_p^H x = U_p^H y,$$

waar de tweede gelijkheid volgt uit de lineaire onafhankelijkheid van de kolommen van U_p.

Om x te parameteriseren, schrijven we $x = Vz$, waarbij $z \in \mathbb{F}^n$ een vector is in de coördinatenbasis van V. Omdat V een orthonormale matrix is, geldt $\|x\|_2 = \|z\|_2$. Substitutie van $x = Vz$ in de vergelijking leidt tot:

$$S_p V_p^H V z = U_p^H y.$$

Omdat $V_p^H V$ een $p \times n$ matrix is met 1 op de diagonaal voor de eerste p componenten en 0 elders, kunnen we dit herschrijven als:

$$S_p z_p = U_p^H y,$$

waarbij z_p de eerste p componenten van z zijn. Hieruit volgt:

$$z_p = S_p^{-1} U_p^H y.$$

De overige $n - p$ componenten van z zijn vrij, maar om $\|x\|_2 = \|z\|_2$ te minimaliseren, kiezen we deze als nul. De minimale norm-oplossing is dan:

$$x^* = Vz = V_p z_p = V_p S_p^{-1} U_p^H y.$$

De minimale norm-oplossing is uniek en wordt gegeven door:

$$x^* = V_p S_p^{-1} U_p^H y,$$

Deze oplossing is uniek doordat we de voorwaarde hebben opgelegd dat de norm het residu minimaliseert en dat dit de minimale norm is. Als deze voorwaarde (het zijn van een minimale norm) wordt weggelaten zullen er meerdere oplossingen zijn die ook het residu minimaliseren. Deze voorwaarde zorgt er voor dat we de kleinste oplossing krijgen in de zin van de Euclidische norm van x en deze is uniek dankzij de constructie.

□

6.10 Eckhart-Young-Mirsky theorema (Theorem 6.14)

Gegeven een matrix $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ die we willen benaderen door een matrix $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$ waarvan de rang ten hoogste $r < \min(m, n)$ bedraagt. Toon aan dat de geïnduceerde operatornorm $\|A - B\|$ geminimaliseerd wordt door de keuze $B = U_r S_r V_r^H$, de zogenaamde gereduceerde singuliere-waardendecompositie, waarbij enkel de r grootste singuliere waarden (en bijbehorende linker en rechter singuliere vectoren) van A worden overgehouden. Dit resultaat staat gekend als het Eckhart-Young-Mirsky theorema. (Gebaseerd op *Theorem 6.14*)

Bewijs. Voor elke matrix B $\in \mathbb{C}^{m \times n}$ met rang r geldt (met de nulliteit de dimensie van de kernel van B):

$$\dim(\ker(B)) = nullity(B) = n - r \tag{39}$$

Dit resultaat volgt rechtstreeks uit de rang-nulliteitsstelling (**2.11 (Rank-nullity theorem)**):

$$rank(B) + nullity(B) = dim(B) = n \tag{40}$$

We zien dat ker(B), met dimensie gelijk aan $n - r$, een deelruimte vormt van $\mathbb{C}^n$. Vervolgens maken we gebruik van de SVD (singular value decomposition) van A die er als volgt uitziet:

$$A = USV^H \tag{41}$$

Hier is V $\in \mathbb{C}^{n \times n}$ een unitaire matrix met kolommen $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\} \subseteq \mathbb{C}^n$. We beschouwen nu de deelruimte opgespannen door $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_{r+1}\}$. Deze deelruimte zal niet disjunct zijn met ker(B) wegens de dimensionaliteit (beide zijn deelruimten van $\mathbb{C}^n$ met dimensies $n-r$ en $r+1$). Laten we nu $\vec{w} = \sum_{i=1}^{r+1} a_i \vec{v}_i$ beschouwen, een eenheidsvector in de intersection tussen deze deelruimten met $\vec{v}_i$ de i'de kolom van V. Omdat $\vec{w} \in kern(B)$ geldt er dat $B\vec{w} = \vec{0}$, hiermee vinden we:

$$||A - B|| \geq ||(A - B)\vec{w}|| = ||A\vec{w}|| \tag{42}$$

Nu kunnen we gebruik maken van de eigenschap van unitaire matrices dat $||U\vec{x}|| = ||\vec{x}||$ met U een unitaire matrix:

$$||A\vec{w}|| = ||SV^H\vec{w}|| \tag{43}$$

Nu schrijven we $\vec{w}$ in termen van V:

$$\vec{w} = \sum_{i=1}^{r+1} a_i \vec{v}_i = V \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{r+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{44}$$

Nu gebruiken we 44 in 43 en maken gebruik van de eigenschap van unitaire matrices dat

$V^H V = I_r$ en van de eigenschap $\sum_{i=1}^{r+1} a_i = 1$:

$$
\begin{aligned}
||SV^H\vec{w}|| &= || \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{r+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \sigma_n \end{bmatrix} V^H V \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{r+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} || \\
&= || \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{r+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \sigma_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{r+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} || \\
&= [\sum_{i=1}^{r+1} |\sigma_i a_i|^2]^{1/2} \geq \sigma_{r+1}
\end{aligned} \tag{45}
$$

Er wordt voldaan aan deze ondergrens door B gelijk te kiezen aan $U_r S_r V_r^H$. We zien dus dat de geïnduceerde operator-norm $||A - B||$ wordt geminimaliseerd door de keuze B = $U_r S_r V_r^H$. □

7 Functieruimten

7.1 Recursierelatie voor univariate veeltermen (Proposition 7.9.)

Gegeven een familie $\{p_n(x), n = 0, 1, 2, \ldots\}$ van reëelwaardige univariate veeltermen, waarbij $p_n(x)$ van graad n is, die orthogonaal zijn ($\langle p_n, p_m\rangle_w = N_n\delta_{n,m}$) ten opzichte van een inwendig product

$$\langle p, q\rangle_w = \int_I w(x)p(x)q(x)\,dx$$

op het interval $I \subseteq \mathbb{R}$ (eindig of oneindig). Toon aan dat deze familie moet voldoen aan de recursierelatie

$$b_{n+1}p_{n+1}(x) + a_np_n(x) + c_{n-1}p_{n-1}(x) = xp_n(x).$$

(Gebaseerd op *Proposition 7.9.*)

Bewijs. We willen aantonen dat voor een famillie $\{p_n(x), k = 0, 1, ...\}$ univariante polynomen ($p_n(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$) geldt:

$$xp_n(x) = c_{n-1}p_{n-1}(x) + b_np_n(x) + a_{n+1}p_{n+1}(x) \tag{46}$$

waarbij $p_n(x)$ van graad n is, die orthogonaal zijn ($\langle p_n, p_m\rangle_w = N_n\delta_{n,m}$) ten opzichte van een inwendig product

$$\langle p, q\rangle_w = \int_I w(x)p(x)q(x)\,dx$$

We weten dat $p_n(x)$ van graad n is, $xp_n(x)$ is dus van graad $n+1$, en kunnen we schrijven als een lineaire combinatie van $\{p_{n-1}(x), p_n(x), p_{n+1}(x)\}$:

$$xp_n(x) = a_0 + a_1p_1(x) + ...a_{n-1}p_{n-1}(x) + a_np_n(x) + a_{n+1}p_{n+1}(x) \tag{47}$$

Nu kunnen we deze in het inproduct steken:

$$\langle xp_n, p_m\rangle_w = \int_I w(x)\sum_{k=0}^{n+1} a_kp_k(x)p_m(x)\,dx$$

Waarbij de termen voor $k \neq m$ orthogonaal zijn dus 0 worden:

$$\langle xp_n, p_m\rangle_w = \int_I w(x)a_mp_m(x)^2\,dx = a_m\langle p_m, p_m\rangle_w = a_mN_m$$

We vinden dus als constante termen:

$$a_m = \frac{\langle xp_n(x), p_m(x)\rangle_w}{N_m} \tag{48}$$

Nu vinden we door de eigenschap dat $p_n(x)$ orthogonaal is met $q(x)$ van graad $k \leq n-1$, dat xp_n orthogonaal is met $q(x)$ van graad $k \leq n-2$, want:

$$\langle xp_n, q\rangle_w = \int_I w(x)(xp_n(x))q(x)\,dx = \int_I w(x)p_n(x)(xq(x))\,dx = \langle p_n, xq\rangle_w$$

Dit wil zeggen dat xp_n orthogonaal is met alle p_m waarvoor $m \leq n-2$, dus blijven enkel a_{n-1}, a_n en a_{n+1} over. Dus vinden we:

$$xp_n(x) = c_{n-1}p_{n-1}(x) + b_np_n(x) + a_{n+1}p_{n+1}(x)$$
$$= \frac{\langle xp_n(x), p_{n-1}(x)\rangle_w}{N_{n-1}}p_{n-1}(x) + \frac{\langle xp_n(x), p_n(x)\rangle_w}{N_n}p_n(x) + \frac{\langle xp_n(x), p_{n+1}(x)\rangle_w}{N_{n+1}}p_{n+1}(x)$$

$\square$

7.2 Projectie of veeltermen en de Christoffel-Darboux formule (Proposition 7.10.)

Gegeven een familie $\{p_n(x), n = 0, 1, 2, \ldots\}$ van reëelwaardige univariate veeltermen, waarbij $p_n(x)$ van graad n is, die orthogonaal zijn ($\langle p_n, p_m \rangle_w = N_n \delta_{n,m}$) ten opzichte van een inwendig product

$$\langle p, q \rangle_w = \int_I w(x)p(x)q(x)\,dx$$

op het interval $I \subseteq \mathbb{R}$ (eindig of oneindig). Toon aan dat de projector op de eerste n veeltermen gegeven wordt door

$$(\hat{P}_n f)(x) = \int_I w(y)K_n(x,y)f(y)\,dy = \int_I w(y)\left[\sum_{k=0}^{n} \frac{p_k(x)p_k(y)}{\langle p_k, p_k \rangle_w}\right] f(y)\,dy,$$

waarbij $K(x, y)$ gegeven wordt door de Christoffel-Darboux formule:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{p_k(x)p_k(y)}{\langle p_k, p_k \rangle_w} = \begin{cases} \frac{a_n}{\langle p_n, p_n \rangle_w} \frac{p_{n+1}(x)p_n(y) - p_n(x)p_{n+1}(y)}{x-y}, & x \neq y, \\ \frac{a_n}{\langle p_n, p_n \rangle_w} \left(p'_{n+1}(x)p_n(y) - p'_n(x)p_{n+1}(y)\right), & x = y. \end{cases}$$

(Gebaseerd op *Proposition 7.10.*)

Bewijs. We bewijzen dat de operator $\hat{P}_n$, gedefinieerd als de orthogonale projectie op de ruimte van polynomen $\{p_0(x), p_1(x), \ldots, p_n(x)\}$, **idempotent** is:

$$\hat{P}_n^2 = \hat{P}_n.$$

De projector $\hat{P}_n$ wordt gegeven door:

$$(\hat{P}_n f)(x) = \int_I w(y)K_n(x,y)f(y)\,dy,$$

waarbij de kern $K_n(x, y)$ wordt gedefinieerd als:

$$K_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p_k(x)p_k(y)}{\langle p_k, p_k \rangle_w}.$$

De toepassing van $\hat{P}_n$ op een functie f is:

$$(\hat{P}_n f)(x) = \int_I w(y)K_n(x,y)f(y)\,dy.$$

Om $\hat{P}_n^2 f$ te berekenen, passen we $\hat{P}_n$ opnieuw toe:

$$(\hat{P}_n^2 f)(x) = \hat{P}_n(\hat{P}_n f)(x) = \int_I w(y)K_n(x,y)\left(\int_I w(z)K_n(y,z)f(z)\,dz\right)dy.$$

We wisselen de integratie order:

$$\int_I w(y)\int_I w(z)K_n(x,y)K_n(y,z)f(z)\,dz\,dy = \int_I w(z)f(z)\int_I w(y)K_n(x,y)K_n(y,z)\,dy\,dz.$$

De kern $K_n(x,y)$ heeft de eigenschap:

$$\int_I w(y)K_n(x,y)K_n(y,z)\,dy = K_n(x,z).$$

Dit volgt uit de definitie van $K_n(x,y)$:

$$K_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p_k(x)p_k(y)}{\langle p_k, p_k\rangle_w}.$$

Door de kern te substitueren in de dubbele integraal krijgen we:

$$\int_I w(y)K_n(x,y)K_n(y,z)\,dy = \int_I w(y)\sum_{k=0}^{n} \frac{p_k(x)p_k(y)}{\langle p_k, p_k\rangle_w}\sum_{l=0}^{n} \frac{p_l(y)p_l(z)}{\langle p_l, p_l\rangle_w}\,dy.$$

Vermenigvuldig de twee sommen:

$$= \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} \frac{p_k(x)p_l(z)}{\langle p_k, p_k\rangle_w \langle p_l, p_l\rangle_w} \int_I w(y)p_k(y)p_l(y)\,dy.$$

Gebruik de orthogonaliteit van de polynomen:

$$\int_I w(y)p_k(y)p_l(y)\,dy = \langle p_k, p_k\rangle_w \delta_{k,l}.$$

Hierdoor blijft alleen de diagonale som over:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{p_k(x)p_k(z)}{\langle p_k, p_k\rangle_w}.$$

Dit is precies $K_n(x,z)$. Dus:

$$\int_I w(y)K_n(x,y)K_n(y,z)\,dy = K_n(x,z).$$

Substitueer dit resultaat terug in de dubbele integraal:

$$(\hat{P}_n^2 f)(x) = \int_I w(z)K_n(x,z)f(z)\,dz.$$

Dit is precies de definitie van $(\hat{P}_n f)(x)$. Dus:

$$\hat{P}_n^2 f = \hat{P}_n f.$$

Hiermee is bewezen dat $\hat{P}_n^2 = \hat{P}_n$.

Nu bewijzen we de **hermiticiteit**:

$$\langle g, \hat{P}_n f\rangle_w = \langle \hat{P}_n g, f\rangle_w.$$

We kunnen dit schrijven als:

$$\langle g, \hat{P}_n f\rangle_w = \int_I w(x)g(x)(\hat{P}_n f)(x)\,dx = \int_I w(x)g(x)\int_I w(y)K_n(x,y)f(y)\,dy\,dx.$$

Wissel de volgorde van integratie:

$$\langle g, \hat{P}_n f\rangle_w = \int_I w(y)f(y) \int_I w(x)g(x)K_n(x,y)\,dx\,dy.$$

We gebruiken de definitie van $(\hat{P}_n g)(y)$ om dit te herschrijven:

$$\langle g, \hat{P}_n f\rangle_w = \int_I w(y)f(y)(\hat{P}_n g)(y)\,dy = \langle \hat{P}_n g, f\rangle_w.$$

Hiermee is de symmetrie aangetoond.

Als laatste willen we de som:

$$K_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p_k(x)p_k(y)}{\langle p_k, p_k\rangle_w}$$

herleiden tot een recursieve uitdrukking. Orthogonale polynomen voldoen aan de drievoudige recursievergelijking:

$$xp_n(x) = a_n p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + c_n p_{n-1}(x),$$

waar a_n, b_n, c_n constante coëfficiënten zijn. Een analoge relatie geldt voor $yp_n(y)$.

Neem de vergelijking voor $xp_n(x)$ en $yp_n(y)$:

$$xp_n(x) = a_n p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + c_n p_{n-1}(x),$$

$$yp_n(y) = a_n p_{n+1}(y) + b_n p_n(y) + c_n p_{n-1}(y).$$

Vermenigvuldig de eerste met $p_n(y)$ en de tweede met $p_n(x)$, en trek ze van elkaar af:

$$(x-y)p_n(x)p_n(y) = a_n\left[p_{n+1}(x)p_n(y) - p_{n+1}(y)p_n(x)\right] - c_n\left[p_n(x)p_{n-1}(y) - p_n(y)p_{n-1}(x)\right].$$

Substitueer $c_n = a_{n-1}\frac{\langle p_n, p_n\rangle_w}{\langle p_{n-1}, p_{n-1}\rangle_w}$, en sommeer over $k = 0, \ldots, n$. Dit geeft:

$$\begin{aligned} K_n(x,y) = \frac{1}{x-y}\Bigg(&\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{\langle p_k, p_k\rangle_w}\left[p_{k+1}(x)p_k(y) - p_{k+1}(y)p_k(x)\right] \\ &- \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{k-1}}{\langle p_{k-1}, p_{k-1}\rangle_w}\left[p_k(x)p_{k-1}(y) - p_k(y)p_{k-1}(x)\right]\Bigg) \end{aligned}$$

We kunnen zien dat alle termen behalve de grensterm wegvallen, we vinden dus:

$$K_n(x,y) = \frac{a_n}{\langle p_n, p_n\rangle_w}\frac{p_{n+1}(x)p_n(y) - p_{n+1}(y)p_n(x)}{x-y}.$$

Voor $x = y$ gebruik je de regel van L'Hopital voor de limiet:

$$K_n(x,x) = \frac{a_n}{\langle p_n, p_n\rangle_w}\left(p'_{n+1}(x)p_n(x) - p'_n(x)p_{n+1}(x)\right).$$

Nu hebben we alles bewezen wat nodig om te kunnen zeggen dat $\hat{P}_n$ de projector is op de eerste n veeltermen, gedifinieerd als:

$$(\hat{P}f)(x) = \int_I w(y)K_n(x,y)f(y)dy \tag{49}$$

Met $K_n(x,y)$ gedefinieerd als:

$$K_n(x,y) = \begin{cases} \dfrac{a_n}{\langle p_n, p_n \rangle_w}\big(p'_{n+1}(x)p_n(x) - p'_n(x)p_{n+1}(x)\big), & \text{als } x = y, \\ \dfrac{a_n}{\langle p_n, p_n \rangle_w}\dfrac{p_{n+1}(x)p_n(y) - p_{n+1}(y)p_n(x)}{x-y}, & \text{als } x \neq y. \end{cases}$$

□

7.3 Een n-graad orthogonale polynoom heeft n alternerende nulpunten (Proposition 7.11.)

Gegeven een familie $\{p_n(x), n = 0, 1, 2, \ldots\}$ van reëelwaardige univariate veeltermen, waarbij $p_n(x)$ van graad n is, die orthogonaal zijn ($\langle p_n, p_m\rangle_w = N_n\delta_{n,m}$) ten opzichte van een inwendig product

$$\langle p, q\rangle_w = \int_I w(x)p(x)q(x)\,dx$$

op het interval $I \subseteq \mathbb{R}$ (eindig of oneindig). Toon aan dat $p_n(x)$ exact n verschillende nulpunten heeft die zich allen binnen het interval I bevinden. Toon bovendien aan dat de nulpunten van p_n en p_{n+1} alterneren, m.a.w. dat de nulpunten van p_n liggen tussen deze van p_{n+1}, door gebruik te maken van bovenstaande Christoffel-Darboux formule. (Gebaseerd op *Proposition 7.11.*)

Bewijs. We bewijzen eerst dat $p_n(x)$ een n aantal verschillende nulpunten heeft. Stel dat $x_1, x_2, ..., x_m$ de nulpunten zijn voor $p_n(x)$ met oneven multipliciteit, dan is $m \leq n$, we tonen aan dat $m = n$, dit doen we door $q(x) = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_m)$ te definieren. Nu is $q(x)p_n(x) \geq 0$, dit volgt omdat de ontbinding van $p_n(x)$ er als volgt uitziet:

$$p_n(x) = (x - x_1)^{c_1}(x - x_2)^{c_2}...(x - x_n)^{c_n}$$

met $c_i \geq 1$, al is $(x - x_i)^{c_i} < 0$ dan hebben we een term in $q(x)$ waarvoor $(x - x_i) < 0$, en dus zal elke term in $p_n(x)$ die kleiner is dan 0 positief worden, waardoor het teken behouden blijft over $x \in I$.

uit deze eigenschap voor $q(x)p_n(x)$ volgt dat het inproduct

$$\langle q, p_n\rangle_w = \int_I w(x)q(x)p_n(x)\,dx \neq 0 \qquad (w(x) > 0 \text{ over I})$$

Hieruit volgt dat $q(x)$ en $p_n(x)$ niet orthogonaal zijn, en dus van dezelfde graad. Dit geldt omdat $q(x)$ een lineaire combinatie is van $\{p_0, p_1, ..., p_m\}$, en dat dus:

$$\langle q, p_n\rangle_w = \langle a_0p_0, p_n\rangle_w + \langle a_1p_1, p_n\rangle_w + ... + \langle a_mp_m, p_n\rangle_w$$

met $\langle p_i, p_j\rangle_w = N_i\delta_{ij} \geq 0$. Dus is de enige mogelijkheid voor $\langle q, p_n\rangle_w = \int_I w(x)q(x)p_n(x)\,dx \neq 0$ is dat $m = n$, met andere woorden, ze zijn van dezelfde graad.

We vinden dus dat $p_n(x)$ exact n aantal reeele nulpunten heeft over het interval I.

Nu bewijzen we dat de nulpunten voor p_{n+1} alterneren met de nulpunten van p_n. Dit kunnen we doen met behulp van

$$K_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p_k(x)p_k(y)}{\langle p_k, p_k\rangle_w} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{\langle p_n, p_n\rangle_w}\big(p'_{n+1}(x)p_n(x) - p'_n(x)p_{n+1}(x)\big), & \text{als } x = y, \\ \dfrac{a_n}{\langle p_n, p_n\rangle_w}\dfrac{p_{n+1}(x)p_n(y) - p_{n+1}(y)p_n(x)}{x - y}, & \text{als } x \neq y. \end{cases}$$

Met dus hier $x = y$ en $K(x,x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p_k(x)p_k(x)}{\langle p_k, p_k\rangle_w} > 0$ (strikt positief omdat $p_k(x)p_k(x) \geq 0$). We vinden dus:

$$\frac{a_n}{\langle p_n, p_n\rangle_w}\big(p'_{n+1}(x)p_n(x) - p'_n(x)p_{n+1}(x)\big) > 0$$

Nu beschouwen we de nulpunten $p_{n+1}(x_i) = 0$ zodat

$$p'_{n+1}(x_i)p_n(x_i) > 0$$

$p'_{n+1}(x)$ verandert van teken tussen opeenvolgende nulpunten van $p_{n+1}(x)$. Aangezien $p_n(x)$ hetzelfde teken heeft als $p'_{n+1}(x)$ bij elk nulpunt x_i van $p_{n+1}(x)$, moet $p_n(x)$ van teken veranderen tussen twee opeenvolgende nulpunten van $p_{n+1}(x)$. Dit betekent dat $p_n(x)$ een nulpunt heeft tussen elk paar opeenvolgende nulpunten van $p_{n+1}(x)$. $\square$

7.4 Verband tussen twee Fourierreeksrepresentaties

Beschouw een continue functie $f(x)$ die periodiek is met periode 2π en die kwadratisch integreerbaar is over één periode, bijvoorbeeld het interval $I = [0, 2\pi]$. Deze functie heeft een Fourierreeksrepresentatie:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k \exp(ikx).$$

Kan je $f(x)$ uitdrukken als een lineaire combinatie van sinus- en cosinusfuncties, namelijk als:

$$f(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(kx).$$

Kan je de coëfficiënten A_0, A_k en B_k (voor $k = 1, 2, \ldots$) uitdrukken als een integraal over $f(x)$?(niet verbeterd)

Bewijs. We beginnen met de complexe Fourierreeksrepresentatie van een periodieke functie $f(x)$ met periode 2π:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikx},$$

waar de Fouriercoëfficiënten $\hat{f}_k$ worden gegeven door:

$$\hat{f}_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx \tag{50}$$

Dit betekent dat we de som kunnen opsplitsen in drie delen:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\hat{f}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikx} + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}_{-k} e^{-ikx} \right).$$

Met behulp van Euler's formule, $e^{ikx} = \cos(kx) + i \sin(kx)$, kunnen we $f(x)$ herschrijven. Combineert men de termen $\hat{f}_k e^{ikx}$ en $\hat{f}_{-k} e^{-ikx}$, dan kan men vinden dat:

$$\hat{f}_k e^{ikx} = \hat{f}_k (\cos(kx) + i \sin(kx)),$$

$$\hat{f}_{-k} e^{-ikx} = \hat{f}_{-k} (\cos(kx) - i \sin(kx)).$$

Wetend dat $f(x)$, een reëelwaardige functie is, en dus $\hat{f}_{-k} = \overline{\hat{f}_k}$, kan men door de termen op te tellen, vinden dat:

$$\hat{f}_k e^{ikx} + \hat{f}_{-k} e^{-ikx} = (\hat{f}_k + \overline{\hat{f}_k}) \cos(kx) + i(\hat{f}_k - \overline{\hat{f}_k}) \sin(kx).$$

De termen $\hat{f}_k + \overline{\hat{f}_k}$ en $\hat{f}_k - \overline{\hat{f}_k}$ kunnen worden herschreven als:

$$\hat{f}_k + \overline{\hat{f}_k} = 2\mathrm{Re}(\hat{f}_k), \quad \hat{f}_k - \overline{\hat{f}_k} = 2i\mathrm{Im}(\hat{f}_k).$$

Daarmee wordt:

$$\hat{f}_k e^{ikx} + \hat{f}_{-k} e^{-ikx} = 2\mathrm{Re}(\hat{f}_k) \cos(kx) - 2\mathrm{Im}(\hat{f}_k) \sin(kx).$$

Dit geeft tot nu toe de volgende gelijkheid:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\hat{f}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\mathrm{Re}(\hat{f}_k)\cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} 2i\mathrm{Im}(\hat{f}_k)\sin(kx) \right).$$

Om de Fouriercoëfficiënten (zie hierboven, vergelijking 50) te gaan bereken kan men hier opnieuw de identiteit van Euler: $e^{-ikx} = \cos(kx) - i\sin(kx)$ en splits deze op in zijn reëel en imaginair stuk:

$$\mathrm{Re}(\hat{f}_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,dx, \quad \mathrm{Im}(\hat{f}_k) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\,dx.$$

vindt men dus dat:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x)dx + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)dx \right] \cos(kx) \\ - \sum_{k=1}^{\infty} 2i \left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)dx \right] \sin(kx) \Big) \end{aligned}$$

De functie $f(x)$ kan dus inderdaad herschreven worden als:

$$f(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(kx)$$

met

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,dx, \quad B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\,dx,$$

en ook voor $k = 0$:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\,dx.$$

$\square$

7.5 Periodiek convolutie (proposition 7.19)

Gegeven twee absoluut integreerbare functies $f, g \in L^1([0, 2\pi])$ en de periodieke convolutie:

$$h(x) = (f * g)(x) = \int_0^L f(x - y \bmod L) g(y)\, dy = \int_0^L f(y) g(x - y \bmod L)\, dy = (g * f)(x).$$

Gegeven de definitie van de Fouriercoëfficiënten:

$$\hat{f}_k = \langle \phi_k, f \rangle = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_0^L f(x) e^{-i\frac{2\pi}{L}kx}\, dx,$$

toon aan dat:

$$\hat{h}_k = \sqrt{L} \hat{f}_k \hat{g}_k.$$

(Gebaseerd op *proposition 7.19*)

Bewijs. Men kan dit eenvoudig bewijzen door simpelweg $\hat{h}_k$, te gaan uitrekenen met de gegeven uitdrukking uit de opgave, namelijk:

$$\begin{aligned}
\hat{h}_k &= \frac{1}{\sqrt{L}} \int_0^L h(x) e^{-i\frac{2\pi}{L}kx} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{L}} \int_0^L \left[\int_0^L f(x-y) g(y) dy \right] e^{-i\frac{2\pi}{L}kx} dx \\
&\overset{2}{=} \int_0^L \left[\frac{1}{\sqrt{L}} \int_0^L f(x-y) e^{-i\frac{2\pi}{L}kx} dx \right] g(y) dy \\
&= \int_0^L \left[\underbrace{\frac{1}{\sqrt{L}} \int_0^L f(x-y) e^{-i\frac{2\pi}{L}k(x-y)} d(x-y)}_{=\hat{f}_k} \right] g(y) e^{-i\frac{2\pi}{L}ky} dy \\
&= \sqrt{L} \hat{f}_k \underbrace{\frac{1}{\sqrt{L}} \int_0^L g(y) e^{-i\frac{2\pi}{L}ky} dy}_{=\hat{g}_k} = \sqrt{L} \hat{f}_k \hat{g}_k
\end{aligned}$$

Men mag de $\bmod L$ in boven staande uitwerking laten vallen en bijvoegen naar believen, aangezien men geïntegreerd wordt in het interval $[0, L]$, waarin de $\bmod L$, operator geen wijzigingen aanbrengt in het integrandum. □

[2] Hier werd de integratie volgorde omgedraaid, waarom dit mag zie `https://en.wikipedia.org/wiki/Order_of_integration_(calculus)`

7.6 Fouriercoëfficiënt $\hat{g}_k$, voor een functie $g(x) = f'(x)$ (Lemma 7.22)

Beschouw een continue functie $f(x)$ die periodiek is met periode 2π en die kwadratisch integreerbaar is over één periode, bijvoorbeeld het interval $I = [0, 2\pi]$. Deze functie heeft een Fourierreeksrepresentatie:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k \exp(ikx).$$

Kan je de Fouriercoëfficiënten $\hat{g}_k$ bepalen van de afgeleide functie $g(x) = f'(x) = \frac{df}{dx}(x)$? Aan welke voorwaarde moeten de Fouriercoëfficiënten $\hat{f}_k$ voldoen opdat $f'(x)$ ook kwadratisch integreerbaar is op het interval $[0, 2\pi]$?(Gebaseerd op *Lemma 7.22*)

Bewijs. We beginnen met de definitie van de Fouriercoëfficiënten. Voor $g(x) = f'(x)$ geldt:

$$\hat{g}_k = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_0^L g(x) exp\left(-i\frac{2\pi}{L}kx\right) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} g(x)e^{-ikx}dx.$$

Omdat $\hat{g}(x) = f'(x)$, substitueren we dit in:

$$\hat{g}_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f'(x)e^{-ikx}dx.$$

We gebruiken nu partiële integratie. Neem $u = e^{-ikx}$ en $dv = f(x)'dx$, zodat $du = -ike^{-ikx}dx$ en $v = f(x)$. Toepassen van integratie per onderdelen geeft:

$$\hat{g}_k = \left[\frac{f(x)e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}}\right]_0^{2\pi} + \frac{ik}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx.$$

$$= \left(\frac{f(2\pi)e^{-ik2\pi}}{\sqrt{2\pi}} - \frac{f(0)e^0}{\sqrt{2\pi}}\right) + \frac{ik}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx.$$

De functie $f(x)$ is periodiek met periode 2π, wat betekent dat $f(2\pi) = f(0)$. Hierdoor verdwijnt de randterm:

$$\hat{g}_k = \frac{ik}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx.$$

De term $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx$ is precies de definitie van de Fouriercoëfficiënt $\hat{f}_k$. Dus:

$$\hat{g}_k = ik\hat{f}_k.$$

Een functie $f(x)$ is kwadratisch integreerbaar over $[0, 2\pi]$ als:

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx < \infty.$$

Voor de Fourierreeks is dit equivalent aan:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_k|^2 < \infty,$$

waarbij h_k de Fouriercoëfficiënten van $h(x)$ zijn. Voor $g(x) = f'(x)$ geldt:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |g_k|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |ik\hat{f}_k|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2|\hat{f}_k|^2.$$

Om te garanderen dat $f'(x)$ kwadratisch integreerbaar is over $[0, 2\pi]$, moet de reeks $\sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2|f_k|^2$ convergeren. Dit betekent dat de Fouriercoëfficiënten $\hat{f}_k$ voldoende snel naar nul moeten gaan naarmate $|k| \to \infty$, oftewel $\lim_{k\to\infty}(\hat{f}_k) = 0$. Met andere woorden, er moet een constante $C > 0$ bestaan zodat:

$$|\hat{f}_k| \leq \frac{C}{|k|^{1+\epsilon}} \quad \text{voor een } \epsilon > 0 \text{ en grote } |k|.$$

$\square$

7.7 Voldoende voorwaarde voor begrensde integraaloperator (Proposition 7.28.)

Gegeven een integraaloperator $\hat{A} \in \mathbf{End}(L^2(I))$ die inwerkt als

$$(\hat{A}f)(x) = \int_I A(x,y) f(y)\, dy.$$

Toon aan dat $\hat{A}$ een begrensde operator is als (voldoende voorwaarde)

$$\int_I \int_I |A(x,y)|^2 \, dx\, dy < \infty.$$

(Gebaseerd op *Proposition 7.28.*)

Bewijs. .
We willen bewijzen dat $\hat{A}$ begrensd is, oftewel dat er een constante C bestaat zodat:

$$\|\hat{A}f\|_2 \leq C\|f\|_2 \quad \text{voor alle } f \in L^2(I),$$

waarbij $\|g\|_2 = \sqrt{\int_I |g(x)|^2 \, dx}$ de L^2-norm is. De norm van $\hat{A}f$ is:

$$\|\hat{A}f\|_2^2 = \int_I \left|(\hat{A}f)(x)\right|^2 \, dx = \int_I \left|\int_I A(x,y) f(y)\, dy\right|^2 \, dx.$$

Toepassing van de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz op de binnenste integraal (voor een vaste x) geeft:

$$\left|\int_I A(x,y) f(y)\, dy\right|^2 \leq \left(\int_I |A(x,y)|^2 \, dy\right) \left(\int_I |f(y)|^2 \, dy\right).$$

Daaruit volgt:

$$|(\hat{A}f)(x)|^2 \leq \left(\int_I |A(x,y)|^2 \, dy\right) \|f\|_2^2.$$

Neem nu de integraal over x om $\|\hat{A}f\|_2^2$ te verkrijgen:

$$\|\hat{A}f\|_2^2 = \int_I |(\hat{A}f)(x)|^2 \, dx \leq \int_I \left(\int_I |A(x,y)|^2 \, dy\right) \|f\|_2^2 \, dx.$$

Omdat $\|f\|_2^2$ onafhankelijk is van x, kunnen we deze buiten de integraal halen:

$$\|\hat{A}f\|_2^2 \leq \|f\|_2^2 \int_I \int_I |A(x,y)|^2 \, dy\, dx.$$

Definieer:

$$M = \int_I \int_I |A(x,y)|^2 \, dx\, dy.$$

Als $M < \infty$, dan geldt:

$$\|\hat{A}f\|_2^2 \leq M\|f\|_2^2.$$

Door beide zijden te wortelen, krijgen we:

$$\|\hat{A}f\|_2 \leq \sqrt{M}\|f\|_2.$$

Hieruit volgt dat $\hat{A}$ een begrensde operator is met operatornorm $\|\hat{A}\| \leq \sqrt{M}$. De operator $\hat{A}$ is dus begrensd als:

$$\int_I \int_I |A(x,y)|^2 \, dx\, dy < \infty.$$

□

7.8 Voldoende voorwaarde voor hermiticiteit van een integraaloperator

Gegeven een integraaloperator $\hat{A} \in \mathbf{End}(L^2(I))$ die inwerkt als

$$(\hat{A}f)(x) = \int_I A(x,y)f(y)\,dy,$$

en die begrensd is (zodat de kernel $A(x,y)$ voldoet aan bovenstaande voorwaarde). Kan je een (voldoende) voorwaarde opleggen op de kernel $A(x,y)$ zodat $\hat{A}$ een symmetrische/Hermitische operator is? Is $\hat{A}$ dan ook zelf-toegevoegd?

Bewijs. Voor $\hat{A}$ symmetrisch of Hermitisch te maken, eisen we dat:

$$\langle \hat{A}f, g\rangle = \langle f, \hat{A}g\rangle \quad \text{voor alle } f, g \in L^2(I).$$

De uitdrukking voor $\langle \hat{A}f, g\rangle$ is:

$$\langle \hat{A}f, g\rangle = \int_I \overline{(\hat{A}f)}(x)g(x)\,dx = \int_I \left(\int_I \overline{A(x,y)f(y)}\,dy\right) g(x)\,dx.$$

Met Fubini's-stelling (toegestaan omdat $A(x,y)$ begrensd is) wisselen we de volgorde van integratie:

$$\langle \hat{A}f, g\rangle = \int_I \overline{f(y)} \left(\int_I \overline{A(x,y)}g(x)\,dx\right) dy$$

Aan de andere kant:

$$\langle f, \hat{A}g\rangle = \int_I \overline{f(y)}(\hat{A}g)(y)\,dy = \int_I \overline{f(y)} \left(\int_I A(y,x)g(x)\,dx\right) dy$$

De vergelijkingen van $\langle \hat{A}f, g\rangle$ en $\langle f, \hat{A}g\rangle$ laten zien dat een voldoende voorwaarde voor symmetrie of Hermiticiteit is:

$$\overline{A(x,y)} = A(y,x)$$

Zelftoegevoegdheid: Aangezien $\hat{A}$ begrensd is, geldt $\mathrm{Dom}(\hat{A}) = \mathrm{Dom}(\hat{A}^\dagger)$. Voor een begrensde operator is Hermiticiteit dus voldoende om zelftoegevoegdheid te garanderen. Dit betekent dat $\hat{A}$ zelftoegevoegd is als $A(x,y) = \overline{A(y,x)}$. **Conclusie:** Indien $A(x,y) = \overline{A(y,x)}$ geldt, is $\hat{A}$ Hermitisch, en omdat de operator begrensd is, is $\hat{A}$ ook zelftoegevoegd. $\square$

7.9 Voor $[\hat{A}, \hat{B}] = 1_V$, kunnen niet $\hat{A}$ en $\hat{B}$, eindig zijn (Proposition 7.31.)

Gegeven twee operatoren $\hat{A}, \hat{B} \in \mathbf{End}(H)$ op een oneindig-dimensionale (separabele) Hilbertruimte H. Toon aan dat, als $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ werkt als de identiteitsoperator, het dan onmogelijk is dat beide operatoren een eindige operatornorm hebben en dus begrensd zijn.
(Gebaseerd op *Proposition 7.31.*)

Bewijs. We moeten bewijzen dat als $[\hat{A}, \hat{B}] = 1_V$ dan is het onmogelijk dat $\hat{A}$ en $\hat{B}$ tegelijkertijd begrensd zijn, stel dus:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = 1_V$$

dan kan via inductie aangetoond worden dat $\hat{A}\hat{B}^n - \hat{B}^n\hat{A} = n\hat{B}^{n-1}$:
voor n=1 is het triviaal:

$$\hat{A}\hat{B} - \hat{B}A = 1$$

nu voor n+1:

$$\hat{A}\hat{B}^{n+1} - \hat{B}^{n+1}\hat{A} = [\hat{A}, \hat{B}^n\hat{B}] = [A, \hat{B}^n]\hat{B} + \hat{B}^n[A, \hat{B}] = n\hat{B}^{n-1}\hat{B} + \hat{B}^n = (n+1)\hat{B}^n$$

en dus is dit bewezen voor n+1 $\Rightarrow \hat{A}\hat{B}^n - \hat{B}^n\hat{A} = n\hat{B}^{n-1}$
nu nemen we de norm van $n\hat{B}^{n-1}$ en maken we gebruik van subadiviteit en submultiplicateit:

$$||n\hat{B}^{n-1}|| = n||\hat{B}^{n-1}|| = ||\hat{A}\hat{B}^n - \hat{B}^n\hat{A}|| \leq ||\hat{A}\hat{B}^n|| + ||\hat{B}^n\hat{A}|| \leq ||\hat{A}|| \cdot ||\hat{B}^n|| + ||\hat{A}|| \cdot ||\hat{B}^n||$$

$$= 2||\hat{A}|| \cdot ||\hat{B}^n|| = 2||\hat{A}|| \cdot ||\hat{B}|| \cdot ||\hat{B}^{n-1}||$$

Delen door $||\hat{B}^{n-1}||$:

$$n \leq 2||\hat{A}|| \cdot ||\hat{B}||$$

Omdat dit waar is voor elke n is het onmogelijk dat A,B beiden begrensd zijn. □

7.10 Zelftoegevoegdheid van een operator, $\hat{P}$ voor $D_{\hat{P}} = \{f \in L^2(I) \mid f' \in L^2(I), f(a) = f(b) = 0\}$

Op de Hilbertruimte van (equivalentieklassen van) kwadratisch integreerbare functies $L^2(I, \mathbb{C})$ (met standaard inwendig product) op het compacte interval $I = [a, b]$ beschouwen we de operator $\hat{P}$ met actie

$$(\hat{P}f)(x) = -if'(x),$$

en domein

$$D_{\hat{P}} = \{f \in L^2(I) \mid f' \in L^2(I), f(a) = f(b) = 0\}.$$

Is deze operator symmetrisch? Is hij zelf-toegevoegd?

Bewijs. We beginnen met het nagaan van de symmetrie. Volgens de definitie is een operator $\hat{P}$ symmetrisch als

$$\langle g, \hat{P}f\rangle = \langle \hat{P}g, f\rangle \quad \forall f, g \in D_{\hat{P}}.$$

We berekenen eerst $\langle g, \hat{P}f\rangle$:

$$\begin{aligned}\langle g, \hat{P}f\rangle &= \int_a^b \overline{g(x)}\big(-if'(x)\big)\,dx \\ &= -i\int_a^b \overline{g(x)}f'(x)\,dx.\end{aligned}$$

Door partieel integreren (met $u = \overline{g(x)}$ en $dv = f'(x)dx$) krijgen we:

$$\int_a^b \overline{g(x)}f'(x)\,dx = \Big[\overline{g(x)}f(x)\Big]_a^b - \int_a^b \overline{g'(x)}f(x)\,dx.$$

Hieruit volgt:

$$\langle g, \hat{P}f\rangle = -i\Big[\overline{g(x)}f(x)\Big]_a^b + i\int_a^b \overline{g'(x)}f(x)\,dx.$$

Aangezien $f(a) = f(b) = 0$ (volgens de definitie van $D_{\hat{P}}$), vervalt de grensbijdrage:

$$\langle g, \hat{P}f\rangle = i\int_a^b \overline{g'(x)}f(x)\,dx.$$

Vergelijk dit met $\langle \hat{P}g, f\rangle$:

$$\langle \hat{P}g, f\rangle = \int_a^b \overline{(-ig'(x))}f(x)\,dx = i\int_a^b \overline{g'(x)}f(x)\,dx.$$

We zien dat $\langle g, \hat{P}f\rangle = \langle \hat{P}g, f\rangle$ voor alle $f, g \in D_{\hat{P}}$. Dus de operator $\hat{P}$ is symmetrisch. Een operator is zelf-toegevoegd als die symmetrisch is en ze allebei hetzelfde domein hebben. Op het domein van de toegevoegde operator gelden geen extra randvoorwaarden voor $g(x)$, zodat $\hat{P}^\dagger g$ zou bestaan.

$$D_{\hat{P}^\dagger} = \{g \in L^2(I) \mid g' \in L^2(I)\}.$$

Dit domein is duidelijk groter dan $D_{\hat{P}}$, omdat voor $\hat{P}^\dagger$ de voorwaarde $g(a) = g(b) = 0$ niet nodig is. Het domein van $\hat{P}$ is:

$$D_{\hat{P}} = \{f \in L^2(I) \mid f' \in L^2(I), f(a) = f(b) = 0\}.$$

Het domein van $\hat{P}^\dagger$ is:

$$D_{\hat{P}^\dagger} = \{g \in L^2(I) \mid g' \in L^2(I)\}.$$

Omdat $D_{\hat{P}} \neq D_{\hat{P}^\dagger}$, is $\hat{P}$ niet zelf toegevoegd. $\square$

7.11 Zelftoegevoegdheid van een operator, $\hat{P}$ voor $D_{\hat{P}} = \{f \in L^2(I) \mid f' \in L^2(I), f(a) = -f(b)\}$

Op de Hilbertruimte van (equivalentieklassen van) kwadratisch integreerbare functies $L^2(I, \mathbb{C})$ (met standaard inwendig product) op het compacte interval $I = [a, b]$ beschouwen we de operator $\hat{P}$ met actie

$$(\hat{P}f)(x) = -if'(x),$$

en domein

$$D_{\hat{P}} = \{f \in L^2(I) \mid f' \in L^2(I), f(a) = -f(b)\}.$$

Is deze operator symmetrisch? Is hij zelf-toegevoegd? Kan je de eigenwaarden en eigenfuncties van deze operator bepalen?(niet verbeterd)

Bewijs. Een operator $\hat{P}$ is symmetrisch als:

$$\langle \hat{P}f, g \rangle = \langle f, \hat{P}g \rangle,$$

voor alle $f, g \in D_{\hat{P}}$, waarbij het standaard inwendig product is gedefinieerd als:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b \overline{f(x)} g(x)\, dx.$$

Neem $f, g \in D_{\hat{P}}$. Dan geldt:

$$\langle \hat{P}f, g \rangle = \int_a^b \left(\overline{-if'(x)} \right) g(x)\, dx.$$

Door partiële integratie krijgen we:

$$\int_a^b (\overline{-if'(x)}) g(x)\, dx = \left[\overline{-if(x)} g(x) \right]_a^b - \int_a^b \overline{f(x)} i \frac{d}{dx} g(x)\, dx.$$

Vanwege de randvoorwaarde $f(a) = -f(b)$ en $g(a) = -g(b)$ volgt:

$$\left[\overline{-if(x)} g(x) \right]_a^b = -i\overline{f(b)} g(b) + i\overline{f(a)} g(a) = 0.$$

De resterende term is:

$$\int_a^b (\overline{-if'(x)}) g(x)\, dx = \int_a^b \overline{f(x)} \left(-ig'(x) \right)\, dx.$$

Dit is precies $\langle f, \hat{P}g \rangle$. Dus:

$$\langle \hat{P}f, g \rangle = \langle f, \hat{P}g \rangle.$$

De operator $\hat{P}$ is dus symmetrisch. Een operator $\hat{P}$ is zelf toegevoegd als deze symmetrisch is en als het domein van $\hat{P}$ gelijk is aan het domein van zijn $\hat{P}^\dagger$. De dagger $\hat{P}^\dagger$ wordt gedefinieerd door:

$$\langle \hat{P}f, g \rangle = \langle f, \hat{P}^\dagger g \rangle,$$

voor alle $f \in D_{\hat{P}}$ en $g \in D_{\hat{P}^\dagger}$. Uit de symmetrie berekening weten we dat:

$$\langle \hat{P}f, g \rangle = \int_a^b \overline{(-if'(x))} g(x)\, dx = \int_a^b \overline{f(x)} (-ig'(x))\, dx.$$

Omdat $f(a) = -f(b)$ en $g(a) = -g(b)$ specifieke randvoorwaarden zijn, volgt dat $D_{\hat{P}} \subset D_{\hat{P}^\dagger}$. Echter, de symmetrie en specifieke randvoorwaarden van $D_{\hat{P}}$ zorgen ervoor dat $D_{\hat{P}} = D_{\hat{P}^\dagger}$. De operator $\hat{P}$ is zelf toegevoegd. Een eigen functie f van $\hat{P}$ voldoet aan:

$$\hat{P}f = \lambda f \quad \text{met } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Dit geeft de differentiaalvergelijking:

$$-if'(x) = \lambda f(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = i\lambda f(x).$$

De oplossing is:

$$f(x) = Ce^{i\lambda x},$$

waarbij C een constante is. De randvoorwaarde $f(a) = -f(b)$ impliceert:

$$Ce^{i\lambda a} = -Ce^{i\lambda b} \quad \Rightarrow \quad e^{i\lambda a} = -e^{i\lambda b}.$$

Dit leidt tot:

$$e^{i\lambda(b-a)} = -1 \quad \Rightarrow \quad \lambda(b-a) = (2n+1)\pi \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Dus:

$$\lambda_n = \frac{(2n+1)\pi}{(b-a)}.$$

De corresponderende eigenfuncties zijn:

$$f_n(x) = Ce^{i\lambda_n x}.$$

$\square$

7.12 Zelftoegevoegdheid van een operator, $\hat{P}$ voor $D_{\hat{P}} = \{f \in L^2(I) \mid f' \in L^2(I), f(a) = 2f(b)\}$

Op de Hilbertruimte van (equivalentieklassen van) kwadratisch integreerbare functies $L^2(I, \mathbb{C})$ (met standaard inwendig product) op het compacte interval $I = [a, b]$ beschouwen we de operator $\hat{P}$ met actie

$$(\hat{P}f)(x) = -if'(x),$$

en domein

$$D_{\hat{P}} = \{f \in L^2(I) \mid f' \in L^2(I), f(a) = 2f(b)\}.$$

Is deze operator symmetrisch? Is hij zelf-toegevoegd?

Bewijs. Neem $f, g \in D_{\hat{P}}$. Dan geldt:

$$\langle \hat{P}f, g\rangle = \int_a^b (-if'(x))\,\overline{g(x)}\,dx.$$

Door partiële integratie krijgen we:

$$\int_a^b (-if'(x))\overline{g(x)}\,dx = \Big[-if(x)\overline{g(x)}\Big]_a^b + \int_a^b f(x)i\frac{d}{dx}\overline{g(x)}\,dx.$$

Vanwege de randvoorwaarde $f(a) = 2f(b)$ en $g(a) = 2g(b)$ volgt:

$$\Big[-if(x)\overline{g(x)}\Big]_a^b = -if(b)\overline{g(b)} + if(a)\overline{g(a)} = -if(b)\overline{g(b)} + i(2f(b))\overline{(2g(b))} = 3if(b)\overline{g(b)}.$$

De resterende term is:

$$\int_a^b (-if'(x))\overline{g(x)}\,dx = 3if(b)\overline{g(b)} + \int_a^b f(x)\overline{(-ig'(x))}\,dx.$$

Om symmetrie te hebben, moet $\langle \hat{P}f, g\rangle = \langle f, \hat{P}g\rangle$. Echter, de extra bijdrage $3if(b)\overline{g(b)}$ zorgt ervoor dat dit niet altijd waar is. De operator $\hat{P}$ is niet symmetrisch.

Een operator $\hat{P}$ is zelf toegevoegd als die symmetrisch is en het domein van $\hat{P}$ gelijk is aan het domein van zijn $\hat{P}^\dagger$. Aangezien $\hat{P}$ niet symmetrisch is, kan $\hat{P}$ ook niet zelf toegevoegd zijn. $\square$

7.13 Zelftoegevoegdheid en spectrum van operator $\hat{A}$ (Example 7.12, 7.13)

Op de Hilbertruimte van (equivalentieklassen van) kwadratisch integreerbare functies $L^2(I, \mathbb{C})$ (met standaard inwendig product) op het compacte interval $I = [a, b]$ beschouwen we de operator

$$(\hat{A}f)(x) = (x^2 - 1)f(x),$$

en domein $D_{\hat{A}} = L^2(I)$. Is deze operator symmetrisch? Is hij zelf-toegevoegd? Kan je raden wat het (discrete, continue en residuele) spectrum van $\hat{A}$ is; waarbij je je antwoord in woorden motiveert?

Achtergrond informatie (niet te kennen voor dit bewijs, maar handig als je niet de hele cursus wilt studeren):

- De **range** $\mathcal{R}_{\hat{A}}$ van een operator $\hat{A}$ is de ruimte van zijn output en is een deelverzameling van het codomein. Bijvoorbeeld als $\hat{A} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ met $\hat{A}(x) = (x, 0, 0)$, dan is het codomein $\mathbb{R}^3$ maar de range $\mathcal{R}_{\hat{A}}$ is echter ééndimensionaal.
- De **resolvent** $\hat{R}_\lambda(\hat{A})$ van een operator $\hat{A}$ en een complex getal λ is gedefiniëerd als de operator $\hat{R}_\lambda(\hat{A}) = (\hat{A} - \lambda\hat{I})^{-1}$
- De **resolvent verzameling** van een operator $\hat{A}$ is de verzameling van complexe getallen λ waarvoor het resolvent $R_\lambda(\hat{A})$ **bestaat** én **gebonden** én **densely defined** is.
- Het **spectrum** $\sigma_{\hat{A}}$ van $\hat{A}$ is een complement van de resolvent verzameling $\hat{R}_\lambda(\hat{A})$. Dit is dus een verzameling waarvoor ofwel $R_\lambda(\hat{A})$ niet bestaat, ofwel niet gebonden is, ofwel niet densely defined is.
  - **Het puntspectrum $\sigma(p)_{\hat{A}}$:** Dit bevat de waarden λ waarvoor $\hat{R}_\lambda(\hat{A})$ niet bestaat omdat $\hat{A} - \lambda\hat{I}$ niet injectief is; in dat geval is λ een eigenwaarde en heeft deze minstens een één-dimensionale eigenruimte $V_\lambda = \ker(\hat{A} - \lambda\hat{I})$.
  - **Het continue spectrum $\sigma(c)_{\hat{A}}$:** Dit bevat de waarden λ waarvoor $\hat{R}_\lambda(\hat{A})$ niet gebonden is; dit zijn waarden die een benaderende eigenvector toelaten.
  - **Het residuele spectrum $\sigma(r)_{\hat{A}}$:** Dit bevat de waarden λ waarvoor $\hat{R}_\lambda(\hat{A})$ niet dicht gedefinieerd is, of equivalent, waarvoor het bereik $\hat{A} - \lambda\hat{I}$ niet dicht is in de Hilbertruimte H.

(Gebaseerd op *Example 7.12, 7.13, ... en Definition 7.29*)

Bewijs. Gegeven is de operator $\hat{A}$ die voor alle functies $f \in L^2(I, \mathbb{R})$ met $I = [a, b]$, een interval, voldoet aan:

$$(\hat{A}f)(x) = (x^2 - 1)f(x),$$

met als domein $D_{\hat{A}} = L^2(I, \mathbb{R})$.

Om te kijken of $\hat{A}$ symmetrisch is, gaan we na of $\langle f, \hat{A}g\rangle_{[a,b]} = \langle \hat{A}f, g\rangle_{[a,b]}$.

$$\begin{aligned}
\langle f, \hat{A}g\rangle_{[a,b]} &= \int_a^b \overline{f(x)}\hat{A}g(x)\,dx \\
&= \int_a^b \overline{f(x)}(x^2 - 1)g(x)\,dx \\
&= \int_a^b (x^2 - 1)\overline{f(x)}g(x)\,dx \\
&= \langle \hat{A}f, g\rangle_{[a,b]}.
\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat $\hat{A}$ symmetrisch is.

Omdat $\hat{A}$ symmetrisch is voor alle $f \in D_{\hat{A}} = L^2(I, \mathbb{R})$, en er geen extra restricties zijn op het domein, volgt uit $\langle f, \hat{A}g\rangle = \langle \hat{A}^\dagger f, g\rangle$ dat $\hat{A}$ noodzakelijk zelf-toegevoegd moet zijn, dus $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$

Spectrum?

1. **Puntspectrum?**
   Er bestaan geen eigenwaarden λ van $\hat{A}$ waarvoor

   $$(\hat{A}f)(x) = (x^2 - 1)f(x) = \lambda f(x).$$

   Dit betekent dat $x^2 - 1 = \lambda$ voor alle x in het interval $[a, b]$. Omdat de functie $x^2 - 1$ varieert over $[a^2 - 1, b^2 - 1]$, zijn er geen enkele waarden λ waarvoor dit geldt voor alle $x \in [a, b]$. Dus, het puntspectrum

   $$\sigma^{(p)}_{\hat{A}} = \varnothing$$

2. **Continu spectrum?**
   Het continue spectrum bestaat uit de waarden van λ waarvoor de resolvent $\hat{R}_\lambda(\hat{A}) = (\hat{A} - \lambda I)^{-1}$ niet gebonden is, maar het bereik van $\hat{A} - \lambda I$ wel dicht is. Voor de operator $\hat{A}$ geldt dat de waarden van $\lambda = x^2 - 1$ precies het interval $[a^2 - 1, b^2 - 1]$ vullen. Dus, het continue spectrum is:

   $$\sigma^{(c)}_{\hat{A}} = [a^2 - 1, b^2 - 1].$$

3. **Residueel spectrum?**
   Het residuele spectrum bestaat uit waarden λ waarvoor $\hat{A} - \lambda I$ niet injectief is, en

het bereik niet dicht is in L^2. Omdat we hebben aangetoond dat het puntspectrum leeg is, en het bereik van $\hat{A} - \lambda I$ dicht is voor alle andere waarden, is het residuele spectrum leeg:

$$\sigma_{\hat{A}}^{(r)} = \varnothing.$$

□

8 Lineaire Differentiaaloperatoren

8.1 Bepaal $J(g(x), f(x))$, zodat $j(x) = \frac{d}{dx}J(g(x), f(x))$ voor een standaard inwendig product (Proposition 8.3.)

Beschouw de tweede-orde lineaire differentiaaloperator $\hat{L}$ die werkt als

$$(\hat{L}f)(x) = a_2(x)\frac{d^2 f}{dx^2}(x) + a_1(x)\frac{df}{dx}(x) + a_0(x)f(x).$$

Definieer de actie van de formeel toegevoegde operator $\hat{L}^\dagger$ ten opzichte van het standaard $L^2(\mathbb{R})$-inwendig product

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx,$$

en toon aan dat

$$j(x) = \overline{g(x)}(\hat{L}f)(x) - \overline{(\hat{L}^\dagger g)(x)}f(x)$$

gelijk is aan een totale afgeleide, i.e. $j(x) = \frac{d}{dx}J(g(x), f(x))$, waarbij $J(g(x), f(x))$ moet worden bepaald.

(Gebaseerd op *Proposition 8.3.*)

Bewijs. We starten van de tweede-orde lineaire differentiaaloperator $\hat{L}$ die werkt op een functie f(x) als:

$$(\hat{L}f)(x) = a_2(x)\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + a_1(x)\frac{df(x)}{dx} + a_0(x)f(x) \tag{51}$$

Nu gaan we de actie definiëren van de formeel toegevoegde operator $\hat{L}^\dagger$ ten opzichte van het standaard $L^2(\mathbb{R})$ inwendig product $\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{g}(x)f(x)dx$. We kunnen dit bekomen door de volgende gelijkheid met de nodige randvoorwaarden:

$$\langle \hat{L}f, g\rangle = \langle f, \hat{L}^\dagger g\rangle \tag{52}$$

We vinden dan:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{L}f, g\rangle = \langle f, \hat{L}^\dagger g\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{g}(x)(\hat{L}f)(x)dx \\
= \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{g}(x)(a_2(x)\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + a_1(x)\frac{df(x)}{dx} + a_0(x)f(x))dx \\
= \int_{-\infty}^{+\infty} a_2(x)\bar{g}(x)\frac{d^2 f(x)}{dx^2}dx + \int_{-\infty}^{+\infty} a_1(x)\bar{g}(x)\frac{df(x)}{dx}dx + \int_{-\infty}^{+\infty} a_0(x)\bar{g}(x)f(x)dx
\end{aligned} \tag{53}$$

We bekijken de eerste integraal van 53 en gaan twee keer partieel integreren:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} a_2(x)\bar{g}(x)\frac{d^2f(x)}{dx^2}dx \\
&= [a_2(x)\bar{g}(x)f'(x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)[a_2'(x)\bar{g}(x) + a_2(x)\bar{g}'(x)]dx \\
&= [a_2(x)\bar{g}(x)f'(x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)a_2'(x)\bar{g}(x)dx - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)a_2(x)\bar{g}'(x)dx \\
&= [a_2(x)\bar{g}(x)f'(x)]_{-\infty}^{+\infty} - [a_2'(x)\bar{g}(x)f(x)]_{-\infty}^{+\infty} - [a_2(x)\bar{g}'(x)f(x)]_{-\infty}^{+\infty} \\
&+ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)a_2''(x)\bar{g}(x) + f(x)a_2'(x)\bar{g}'(x)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)a_2'(x)\bar{g}'(x) + f(x)a_2(x)\bar{g}''(x)dx \\
&= [a_2(x)\bar{g}(x)f'(x)]_{-\infty}^{+\infty} - [f(x)(a_2'(x)\bar{g}(x) + a_2(x)\bar{g}'(x))]_{-\infty}^{+\infty} \\
&+ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)[a_2''(x)\bar{g}(x) + 2a_2(x)'\bar{g}'(x) + a_2(x)\bar{g}''(x)]dx
\end{aligned} \tag{54}$$

We bekijken de tweede integraal van 53 en gaan partieel integreren:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} a_1(x)\bar{g}(x)\frac{df(x)}{dx}dx \\
&= [a_1(x)\bar{g}(x)f(x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)[a_1'(x)\bar{g}(x) + a_1(x)\bar{g}'(x)]dx
\end{aligned} \tag{55}$$

We bekijken de derde integraal van 53 en vinden:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a_0(x)\bar{g}(x)f(x)dx \tag{56}$$

Nu substitueren we 54, 55 en 56 in 53:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow &[a_2(x)\bar{g}(x)f'(x)]_{-\infty}^{+\infty} - [f(x)(a_2'(x)\bar{g}(x) + a_2(x)\bar{g}'(x))]_{-\infty}^{+\infty} + [a_1(x)\bar{g}(x)f(x)]_{-\infty}^{+\infty} \\
&+ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)[a_2''(x)\bar{g}(x) + 2a_2(x)'\bar{g}'(x) + a_2(x)\bar{g}''(x)] \\
&- f(x)[a_1'(x)\bar{g}(x) + a_1(x)\bar{g}'(x)] + a_0(x)\bar{g}(x)f(x)dx \\
&= [a_2(x)\bar{g}(x)f'(x)]_{-\infty}^{+\infty} - [f(x)(a_2'(x)\bar{g}(x) + a_2(x)\bar{g}'(x))]_{-\infty}^{+\infty} + [a_1(x)\bar{g}(x)f(x)]_{-\infty}^{+\infty} \\
&+ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\frac{d^2a_2(x)\bar{g}(x)}{dx^2} - f(x)\frac{da_1(x)\bar{g}(x)}{dx} + a_0(x)\bar{g}(x)f(x)dx \\
&= [a_2(x)\bar{g}(x)f'(x)]_{-\infty}^{+\infty} - [f(x)(a_2'(x)\bar{g}(x) + a_2(x)\bar{g}'(x))]_{-\infty}^{+\infty} + [a_1(x)\bar{g}(x)f(x)]_{-\infty}^{+\infty} \\
&+ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\frac{d^2\overline{\overline{a_2(x)}g(x)}}{dx^2} - f(x)\frac{d\overline{\overline{a_1(x)}g(x)}}{dx} + \overline{\overline{a_0(x)}g(x)}f(x)dx
\end{aligned} \tag{57}$$

We vinden dus uit 57:

$$\langle f, \hat{L}^\dagger g\rangle = [Randvoorwaarden] + \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\frac{d^2\overline{\overline{a_2(x)}g(x)}}{dx^2} - f(x)\frac{d\overline{\overline{a_1(x)}g(x)}}{dx} + \overline{\overline{a_0(x)}g(x)}f(x)dx \tag{58}$$

Om de actie van de formeel toegevoegde operator $\hat{L}^{\dagger}$ te bepalen, moet er gelden voor de randvoorwaarden:

$$[Randvoorwaarden] = 0 \tag{59}$$

We kunnen hieruit vinden dat:

$$\langle f, \hat{L}^{\dagger} g\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\frac{d^2\overline{\overline{a_2(x)}g(x)}}{dx^2} + f(x)\frac{d\overline{\overline{a_1(x)}g(x)}}{dx} + \overline{\overline{a_0(x)}g(x)}f(x)dx \tag{60}$$

Waaruit we de actie van $\hat{L}^{\dagger}$ op een functie f(x) kunnen bepalen:

$$(\hat{L}^{\dagger} f)(x) = \frac{d^2\overline{a_2(x)}f(x)}{dx^2} - \frac{d\overline{a_1(x)}f(x)}{dx} + \overline{a_0(x)}f(x) \tag{61}$$

Vervolgens gaan we aantonen dat:

$$j(x) = \bar{g}(x)(\hat{L}f)(x) - \overline{(\hat{L}^{\dagger}g)(x)}f(x) \tag{62}$$

gelijk is aan $\frac{dJ(g(x), f(x))}{dx}$ waarbij we $J(g(x), f(x))$ bepalen. We gaan eerst 51 en 61 invullen in 62 waaruit we krijgen:

$$\begin{aligned}
j(x) &= \bar{g}(x)a_2(x)\frac{d^2f(x)}{dx^2} + \bar{g}(x)a_1(x)\frac{df(x)}{dx} + \bar{g}(x)a_0(x)f(x) \\
&- f(x)\frac{d^2a_2(x)\bar{g}(x)}{dx^2} + f(x)\frac{da_1(x)\bar{g}(x)}{dx} - f(x)a_0(x)\bar{g}(x) \\
&= \bar{g}(x)a_2(x)\frac{d^2f(x)}{dx^2} + \bar{g}(x)a_1(x)\frac{df(x)}{dx} - f(x)\frac{d^2a_2(x)\bar{g}(x)}{dx^2} + f(x)\frac{da_1(x)\bar{g}(x)}{dx} \\
&= \frac{d}{dx}[\bar{g}(x)a_1(x)f(x)] + \bar{g}(x)a_2(x)\frac{d^2f(x)}{dx^2} - f(x)\frac{d^2a_2(x)\bar{g}(x)}{dx^2} \\
&= \frac{d}{dx}[\bar{g}(x)a_1(x)f(x)] + \bar{g}(x)a_2(x)\frac{d^2f(x)}{dx^2} - f(x)\frac{d^2a_2(x)\bar{g}(x)}{dx^2} \\
&+ \frac{d}{dx}[\bar{g}(x)a_2(x)]\frac{df(x)}{dx} - \frac{d}{dx}[\bar{g}(x)a_2(x)]\frac{df(x)}{dx} \\
&= \frac{d}{dx}[\bar{g}(x)a_1(x)f(x)] + \frac{d}{dx}[\bar{g}(x)a_2(x)\frac{df(x)}{dx}] - \frac{d}{dx}[f(x)\frac{da_2(x)\bar{g}(x)}{dx}] \\
&= \frac{d}{dx}[\bar{g}(x)a_1(x)f(x) + \bar{g}(x)a_2(x)\frac{df(x)}{dx} - f(x)\frac{da_2(x)\bar{g}(x)}{dx}] \\
&= \frac{dJ(g(x), f(x))}{dx}
\end{aligned} \tag{63}$$

We zijn de gevonden uitdrukking bekomen met J(g(x),f(x)):

$$J(g(x), f(x)) = a_1(x)\bar{g}(x)f(x) + a_2(x)\bar{g}(x)\frac{df(x)}{dx} - f(x)\frac{da_2(x)\bar{g}(x)}{dx} \tag{64}$$

□

8.2 Bepaal $J(g(x), f(x))$, zodat $j(x) = \frac{d}{dx}J(g(x), f(x))$ voor een gewogen inwendig product (Proposition 8.5.)

Herneem de vorige vraag voor het gewogen inwendig product

$$\langle f, g\rangle_w = \int_{-\infty}^{\infty} w(x)g(x)f(x)\,dx.$$

Onder welke voorwaarden voor $a_2(x)$, $a_1(x)$ en $a_0(x)$ (die reëelwaardig en voldoende glad kunnen worden verondersteld) is $\hat{L}$ formeel zelf-toegevoegd?

(Gebaseerd op *Proposition 8.5.*)

Bewijs. We starten van de tweede-orde lineaire differentiaaloperator $\hat{L}$ die werkt op een functie f(x) met $a_2(x), a_1(x), a_0(x)$ reëelwaardig en voldoende glad als:

$$(\hat{L}f)(x) = a_2(x)\frac{d^2f(x)}{dx^2} + a_1(x)\frac{df(x)}{dx} + a_0(x)f(x) \tag{65}$$

Nu gaan we de actie definiëren van de formeel toegevoegde operator $\hat{L}^\dagger$ ten opzichte van het gewogen inwendig product over $L^2(\mathbb{R})$: $\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} w(x)\overline{g(x)}f(x)dx$. We kunnen dit bekomen door de volgende gelijkheid met de nodige randvoorwaarden:

$$\langle \hat{L}f, g\rangle = \langle f, \hat{L}^\dagger g\rangle \tag{66}$$

We vinden dan:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{L}f, g\rangle = \langle f, \hat{L}^\dagger g\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} w(x)\bar{g}(x)(\hat{L}f)(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} w(x)\bar{g}(x)(a_2(x)\frac{d^2f(x)}{dx^2} + a_1(x)\frac{df(x)}{dx} + a_0(x)f(x))dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} a_2(x)w(x)\bar{g}(x)\frac{d^2f(x)}{dx^2}dx + \int_{-\infty}^{+\infty} w(x)a_1(x)\bar{g}(x)\frac{df(x)}{dx}dx \\
&+ \int_{-\infty}^{+\infty} w(x)a_0(x)\bar{g}(x)f(x)dx
\end{aligned} \tag{67}$$

We bekijken de eerste integraal van 67 en gaan twee keer partieel integreren:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} a_2(x)w(x)\bar{g}(x)\frac{d^2f(x)}{dx^2}dx \\
&= [w(x)a_2(x)\bar{g}(x)f'(x)]_{-\infty}^{+\infty} \\
&- \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)[w'(x)a_2(x)\bar{g}(x) + w(x)a_2'(x)\bar{g}(x) + w(x)a_2(x)\bar{g}'(x)]dx \\
&= [w(x)a_2(x)\bar{g}(x)f'(x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)w'(x)a_2(x)\bar{g}(x)dx \\
&- \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)w(x)a_2'(x)\bar{g}(x)dx - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)w(x)a_2(x)\bar{g}'(x)dx \\
&= [w(x)a_2(x)\bar{g}(x)f'(x)]_{-\infty}^{+\infty} - [w'(x)a_2(x)\bar{g}(x)f(x)]_{-\infty}^{+\infty} - [w(x)a_2'(x)\bar{g}(x)f(x)]_{-\infty}^{+\infty} \\
&- [w(x)a_2(x)\bar{g}'(x)f(x)]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)[w''(x)a_2(x)\bar{g}(x) + w'(x)a_2'(x)\bar{g}(x) + w'(x)a_2(x)\bar{g}'(x)]dx \\
&+ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)[w'(x)a_2'(x)\bar{g}(x) + w(x)a_2''(x)\bar{g}(x) + w(x)a_2'(x)\bar{g}'(x)]dx \\
&+ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)[w'(x)a_2(x)\bar{g}'(x) + w(x)a_2'(x)\bar{g}'(x) + w(x)a_2(x)\bar{g}''(x)]dx \\
&= [w(x)a_2(x)\bar{g}(x)f'(x)]_{-\infty}^{+\infty} - [w'(x)a_2(x)\bar{g}(x)f(x)]_{-\infty}^{+\infty} - [w(x)a_2'(x)\bar{g}(x)f(x)]_{-\infty}^{+\infty} \\
&+ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\frac{d^2}{dx^2}[w(x)a_2(x)\bar{g}(x)]dx
\end{aligned} \tag{68}$$

We bekijken de tweede integraal van 67 en gaan één keer partieel integreren:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} w(x)a_1(x)\bar{g}(x)\frac{df(x)}{dx}dx \\
&= [w(x)a_1(x)\bar{g}(x)f(x)]_{-\infty}^{+\infty} \\
&- \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)[w'(x)a_1(x)\bar{g}(x) + w(x)a_1'(x)\bar{g}(x) + w(x)a_1(x)\bar{g}'(x)]dx \\
&= [w(x)a_1(x)\bar{g}(x)f(x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\frac{d}{dx}[w(x)a_1(x)\bar{g}(x)]dx
\end{aligned} \tag{69}$$

We bekijken de derde integraal van 67:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(x)a_0(x)\bar{g}(x)f(x)dx \tag{70}$$

Nu substitueren we 68, 69 en 70 in 67:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow &[w(x)a_2(x)\bar{g}(x)f'(x)]_{-\infty}^{+\infty} - [w'(x)a_2(x)\bar{g}(x)f(x)]_{-\infty}^{+\infty} \\
&- [w(x)a_2'(x)\bar{g}(x)f(x)]_{-\infty}^{+\infty} + [w(x)a_1(x)\bar{g}(x)f(x)]_{-\infty}^{+\infty} \\
&+ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\frac{d^2}{dx^2}[w(x)a_2(x)\bar{g}(x)] - f(x)\frac{d}{dx}[w(x)a_1(x)\bar{g}(x)] + w(x)a_0(x)\bar{g}(x)f(x)dx \\
&= [Randvoorwaarden] \\
&+ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\frac{d^2}{dx^2}[w(x)a_2(x)\bar{g}(x)] - f(x)\frac{d}{dx}[w(x)a_1(x)\bar{g}(x)] + w(x)a_0(x)\bar{g}(x)f(x)dx
\end{aligned} \tag{71}$$

Om de actie van de formeel toegevoegde operator $\hat{L}^\dagger$ te bepalen, moet er gelden voor de randvoorwaarden:

$$[Randvoorwaarden] = 0 \tag{72}$$

Dan geldt er:

$$\begin{aligned}
&\langle f, \hat{L}^\dagger g\rangle \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\frac{d^2}{dx^2}[w(x)a_2(x)\bar{g}(x)] - f(x)\frac{d}{dx}[w(x)a_1(x)\bar{g}(x)] + w(x)a_0(x)\bar{g}(x)f(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} w(x)f(x)(\frac{1}{w(x)}\frac{d^2}{dx^2}[w(x)a_2(x)\bar{g}(x)]) \\
&- w(x)f(x)(\frac{1}{w(x)}\frac{d}{dx}[w(x)a_1(x)\bar{g}(x)]) + w(x)f(x)[a_0(x)\bar{g}(x)]dx
\end{aligned} \tag{73}$$

De stappen hierboven zijn mogelijk wegens het feit dat de functies $a_2(x), a_1(x), a_0(x), w(x)$ reëelwaardig en voldoende glad zijn. We kunnen dan nu de actie van $\hat{L}^\dagger$, de formeel toegevoegde operator, terugvinden op een functie f(x):

$$(\hat{L}^\dagger f)(x) = \frac{1}{w(x)}\frac{d^2}{dx^2}[w(x)a_2(x)f(x)]) - \frac{1}{w(x)}\frac{d}{dx}[w(x)a_1(x)f(x)]) + a_0(x)f(x) \tag{74}$$

Nu gaan we de voorwaarden na waaraan $a_2(x), a_1(x), a_0(x)$ moeten voldoen zodat $\hat{L}$ formeel zelf-toegevoegd is:

$$\hat{L} = \hat{L}^\dagger \tag{75}$$

We starten van de formeel toegevoegde van deze lineaire differentiaal operator74 en gaan zo de respectievelijke voorwaarden na.

$$\begin{aligned}
(\hat{L}^\dagger f)(x) &= \frac{1}{w(x)}\frac{d^2}{dx^2}[w(x)a_2(x)f(x)]) - \frac{1}{w(x)}\frac{d}{dx}[w(x)a_1(x)f(x)]) + a_0(x)f(x) \\
&= a_2(x)\frac{d^2f(x)}{dx^2} + (\frac{2w'(x)}{w(x)}a_2(x) + 2a_2'(x) - a_1(x))\frac{df(x)}{dx} \\
&+ (\frac{w''(x)a_2(x) + 2w'(x)a_2'(x) - w'(x)a_1(x)}{w(x)} + a_2''(x) - a_1'(x) + a_0(x))f(x)
\end{aligned} \tag{76}$$

Uit 76 halen we twee voorwaarden. De eerste voorwaarde is:

$$\begin{aligned}
&\frac{2w'(x)}{w(x)}a_2(x) + 2a_2'(x) - a_1(x) = a_1(x) \\
&\Leftrightarrow \frac{w'(x)a_2(x) + w(x)a_2'(x)}{w(x)} = a_1(x)
\end{aligned} \tag{77}$$

De tweede voorwaarde is:

$$\begin{aligned}
&\frac{w''(x)a_2(x) + 2w'(x)a_2'(x) - w'(x)a_1(x)}{w(x)} + a_2''(x) - a_1'(x) + a_0(x) = a_0(x) \\
&\Leftrightarrow \frac{w''(x)a_2(x) + 2w'(x)a_2'(x) - w(x)a_2''(x)}{w(x)} = \frac{w'(x)a_1(x) + w(x)a_1'(x)}{w(x)}
\end{aligned} \tag{78}$$

We merken eerst op dat de tweede voorwaarde 78 de afgeleide is van de eerste voorwaarde 77. We zien dat $a_1(x)$ volledig wordt bepaald in functie van $a_2(x)$ en $w(x)$, ook zien we dat $a_0(x)$ vrij kan worden gekozen (het is een arbitraire functie) zodat $\hat{L}$ formeel zelf-toegevoegd is. We kunnen deze voorwaarden 77 en 78 gebruiken in de uitdrukking voor de tweede-orde lineaire differentiaaloperator $\hat{L}$ die werkt op een functie f(x) 65:

$$\begin{aligned}
(\hat{L}f) &= a_2(x)\frac{d^2f(x)}{dx^2} + a_1(x)\frac{df(x)}{dx} + a_0(x)f(x) \\
&= \frac{w(x)}{w(x)}a_2(x)\frac{d^2f(x)}{dx^2} + (\frac{w'(x)a_2(x) + w(x)a_2'(x)}{w(x)})\frac{df(x)}{dx} + a_0(x)f(x) \\
&= \frac{1}{w(x)}\frac{d}{dx}[w(x)a_2(x)\frac{df(x)}{x}] + a_0(x)f(x) \\
&= -\frac{1}{w(x)}\frac{d}{dx}[p(x)\frac{df(x)}{x}] + \frac{q(x)}{w(x)}f(x)
\end{aligned} \tag{79}$$

We zien in 79 de Sturm-Liouville operator met $p(x) = -w(x)a_2(x)$ en $q(x) = w(x)a_0(x)$. We vinden dus dat als we een reële tweede-orde lineaire differentiaaloperator $\hat{L}$ kunnen schrijven als de Sturm-Liouville operator, dat deze operator formeel zelf toegevoegd is. Vervolgens gaan we aantonen dat:

$$j(x) = w(x)\bar{g}(x)(\hat{L}f)(x) - w(x)\overline{(\hat{L}^\dagger g)(x)}f(x) \tag{80}$$

gelijk is aan $\dfrac{dJ(g(x), f(x))}{dx}$ waarbij we $J(g(x), f(x))$ bepalen.We gaan eerst 65 en 74 invullen in 80 en gebruik maken van het feit dat de functies $a_2(x), a_1(x), a_0(x), w(x)$ reëelwaardig en voldoende glad zijn:

$$\begin{aligned}
j(x) &= w(x)\overline{g(x)}a_2(x)\frac{d^2f(x)}{dx^2} + w(x)\overline{g(x)}a_1(x)\frac{df(x)}{dx} + w(x)\overline{g(x)}a_0(x)f(x) \\
&- w(x)f(x)\frac{1}{w(x)}\frac{d^2}{dx^2}[w(x)a_2(x)\overline{g(x)}] + w(x)f(x)\frac{1}{w(x)}\frac{d}{dx}[w(x)a_1(x)\overline{g(x)}] \\
&- w(x)f(x)a_0(x)\overline{g(x)} \\
&= w(x)\overline{g(x)}a_2(x)\frac{d^2f(x)}{dx^2} + w(x)\overline{g(x)}a_1(x)\frac{df(x)}{dx} \\
&- f(x)\frac{d^2}{dx^2}[w(x)a_2(x)\overline{g(x)}] + f(x)\frac{d}{dx}[w(x)a_1(x)\overline{g(x)}] \\
&= \frac{d}{dx}[w(x)\overline{g(x)}a_1(x)f(x)] + w(x)\overline{g(x)}a_2(x)\frac{d^2f(x)}{dx^2} - f(x)\frac{d^2}{dx^2}[w(x)a_2(x)\overline{g(x)}] \\
&+ \frac{d}{dx}[w(x)\overline{g(x)}a_2(x)]\frac{df(x)}{dx} - \frac{d}{dx}[w(x)\overline{g(x)}a_2(x)]\frac{df(x)}{dx} \\
&= \frac{d}{dx}[w(x)\overline{g(x)}a_1(x)f(x)] + \frac{d}{dx}[w(x)\overline{g(x)}a_2(x)\frac{df(x)}{dx}] - \frac{d}{dx}[f(x)\frac{d}{dx}[w(x)a_2(x)\overline{g(x)}]] \\
&= \frac{d}{dx}[w(x)\overline{g(x)}a_1(x)f(x) + w(x)\overline{g(x)}a_2(x)\frac{df(x)}{dx} - f(x)\frac{d}{dx}[w(x)a_2(x)\overline{g(x)}]] \\
&= \frac{dJ(g(x), f(x))}{dx}
\end{aligned}$$

$$\implies J(g(x), f(x)) = w(x)\overline{g(x)}a_1(x)f(x) + w(x)\overline{g(x)}a_2(x)\frac{df(x)}{dx} - f(x)\frac{d}{dx}[w(x)a_2(x)\overline{g(x)}]$$

□

8.3 Symmetrie en zelftoegevoegdheid van $\hat{L} = -\hat{D}^2$

Beschouw de tweede-orde lineaire differentiaaloperator $\hat{L} = -\hat{D}^2$, i.e. $(\hat{L}f)(x) = -f''(x)$ met domein

$$D_{\hat{L}} = \{f \in L^2([a,b]) \mid f'' \in L^2([a,b]), f(a) = f(b), f'(a) = 0\}.$$

Wat is de actie en het domein van $\hat{L}^\dagger$? Is $\hat{L}$ zelf-toegevoegd met deze randvoorwaarden? (Dit soort vragen moet ook kunnen met variaties in de randvoorwaarden.)

Bewijs. We beschouwen een tweede-orde lineaire differentiaaloperator $\hat{L} = -\hat{D}^2$ met als domein $D_{\hat{L}} = \{f \in L^2([a,b]) | f'' \in L^2([a,b]), f(a) = f(b), f'(a) = 0\}$. We gebruiken de volgende gelijkheid door gebruik te maken van de nodige randvoorwaarden:

$$\langle \hat{L}f, g\rangle = \langle f, \hat{L}^\dagger g\rangle \tag{81}$$

Nu gaan we de actie en het domein ($D_{\hat{L}^\dagger}$) bepalen van de formeel toegevoegde operator $\hat{L}^\dagger$ ten opzichte van het inwendig product over $L^2([a,b])$: $\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{g(x)} f(x)dx$. We vinden dan door gebruik te maken van partiële integratie:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{L}f, g\rangle = \langle f, \hat{L}^\dagger g\rangle &= \int_a^b \overline{g(x)}(\hat{L}f)(x)dx \\
&= \int_a^b -\overline{g(x)} f''(x)dx \\
&= \int_b^a \overline{g(x)} f''(x)dx \\
&= [f'(x)\bar{g}(x)]_b^a - \int_b^a f'(x)\bar{g}'(x) \\
&= [f'(x)\bar{g}(x)]_b^a - [f(x)\bar{g}'(x)]_b^a + \int_b^a f(x)\bar{g}''(x) \\
&= f'(a)\bar{g}(a) - f'(b)\bar{g}(b) - f(a)\bar{g}'(a) + f(b)\bar{g}'(b) - \int_a^b f(x)\bar{g}''(x)
\end{aligned} \tag{82}$$

Nu gebruiken we de randvoorwaarden van het domein van $D_{\hat{L}}$ in 82:

$$\Leftrightarrow -f'(b)\bar{g}(b) - f(a)[\bar{g}'(b) - \bar{g}'(a)] - \int_a^b f(x)\bar{g}''(x) \tag{83}$$

Hieruit vinden we het domein $D_{\hat{L}^\dagger}$:

$$D_{\hat{L}^\dagger} = \{f \in L^2([a,b]) | g'' \in L^2([a,b]), g'(a) = g'(b), g(b) = 0\} \tag{84}$$

Nu kunnen we met 82 en 84 de formeel toegevoegde operator $\hat{L}^\dagger$ bepalen:

$$\hat{L}^\dagger = -\hat{D}^2 \tag{85}$$

De actie van $\hat{L}^\dagger$ op een functie f(x) is gelijk aan de actie van $\hat{L}$ en wordt gegeven door:

$$(\hat{L}^\dagger f)(x) = -\frac{d^2 f}{dx}(x) \tag{86}$$

Maar we merken op dat de domeinen verschillend zijn: $D_{\hat{L}^\dagger} \neq D_{\hat{L}}$ dus de operator is NIET zelf-toegevoegd met deze randvoorwaarden. $\square$

8.4 Zelftoegevoegdheid van de Sturm-Liouville operator (Proposition 8.7)

Beschouw de Sturm-Liouville operator

$$(\hat{L}u)(x) = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}(x)\right) + q(x)u(x).$$

Toon aan dat deze operator zelf-toegevoegd is met betrekking tot het standaard inwendig product op $L^2([a,b])$, mits gebruik wordt gemaakt van de gescheiden randvoorwaarden $f(a)+\alpha f'(a) = 0$ en $f(b)+\beta f'(b) = 0$, waarbij $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. (Gebaseerd op *Proposition 8.7*)

Bewijs. We beschouwen de Sturm-Liouville-operator

$$(\hat{L}u)(x) = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}u(x)\right) + q(x)u(x),$$

waarbij $p(x) > 0$ en $q(x)$ reëel en continu zijn op het interval $[a, b]$.
Het doel is te bewijzen dat $\hat{L}$ zelf-toegevoegd (self-adjoint) is in $L^2([a,b])$ met het standaard inwendig product:

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b \overline{f(x)}g(x)\,dx,$$

onder de randvoorwaarden:

$$f(a) + \alpha f'(a) = 0 \quad \text{en} \quad f(b) + \beta f'(b) = 0, \quad \text{waar } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Met andere woorden:

$$\hat{L} = \hat{L}^\dagger$$

We willen symmetrie aantonen onder de randvoorwaarden:

$$\langle f, \hat{L}g\rangle = \int_a^b \overline{f(x)}\left(\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}g(x)\right) + q(x)g(x)\right)\,dx.$$

$$= \int_a^b \overline{f(x)}q(x)g(x)\,dx + \int_a^b \overline{f(x)}\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}g(x)\right)\,dx.$$

$$= \int_a^b \overline{f(x)}q(x)g(x)\,dx + \int_a^b \overline{f(x)}\frac{d}{dx}p(x)\frac{d}{dx}g(x) + \overline{f(x)}p(x)\frac{d^2}{dx^2}g(x)\,dx$$

partiele integratie

We schrijven ook $\langle \hat{L}f, g\rangle$ uit:

$$\langle \hat{L}f, g\rangle = \int_a^b \left(\overline{\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}f(x)\right) + q(x)f(x)}\right)g(x)\,dx$$

$$= \int_a^b \overline{q(x)f(x)}g(x)\,dx + \int_a^b \overline{\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}f(x)\right)}g(x)\,dx$$

$$= \int_a^b \overline{q(x)f(x)}g(x)\,dx + \int_a^b \overline{\overline{g(x)}\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}f(x)\right)}\,dx$$

$$= \int_a^b \overline{f(x)q(x)}g(x)\,dx + \int_a^b \overline{\overline{g(x)}\frac{d}{dx}p(x)\frac{d}{dx}f(x) + \overline{g(x)}p(x)\frac{d^2}{dx^2}f(x)}\,dx$$

Met $p(x)$ en $q(x)$ reëel wordt dit

$$= \int_a^b \overline{f(x)}q(x)g(x)\,dx + \int_a^b g(x)\frac{d}{dx}p(x)\frac{d}{dx}\overline{f(x)} + g(x)p(x)\frac{d^2}{dx^2}\overline{f(x)}\,dx$$

We trekken deze 2 vergelijkingen van elkaar af

$$\begin{aligned}\langle f, \hat{L}g\rangle - \langle \hat{L}f, g\rangle = \int_a^b &\overline{f(x)}\frac{d}{dx}p(x)\frac{d}{dx}g(x) + \overline{f(x)}p(x)\frac{d^2}{dx^2}g(x)\\ &- g(x)\frac{d}{dx}p(x)\frac{d}{dx}\overline{f(x)} + g(x)p(x)\frac{d^2}{dx^2}\overline{f(x)}\,dx\end{aligned}$$

We kunnen dit in 4 integralen schrijven

$$\begin{aligned}&= \int_a^b \overline{f(x)}\frac{d}{dx}p(x)\frac{d}{dx}g(x)\,dx + \int_a^b \overline{f(x)}p(x)\frac{d^2}{dx^2}g(x)\,dx\\ &- \int_a^b g(x)\frac{d}{dx}p(x)\frac{d}{dx}\overline{f(x)}\,dx + \int_a^b g(x)p(x)\frac{d^2}{dx^2}\overline{f(x)}\,dx\end{aligned}$$

We stellen een vergelijking op voor de eerste term (analoog derde term)

$$\int_a^b \overline{f(x)}\frac{d}{dx}p(x)\frac{d}{dx}g(x)\,dx = \left[\overline{f(x)}p(x)\frac{d}{dx}g(x)\right]_a^b - \int_a^b p(x)\frac{d}{dx}\left(\overline{f(x)}\frac{d}{dx}g(x)\right)\,dx$$

$$= \left[\overline{f(x)}p(x)\frac{d}{dx}g(x)\right]_a^b - \int_a^b \overline{f(x)}p(x)\frac{d^2}{dx^2}g(x)\,dx - \int_a^b p(x)\frac{d}{dx}\overline{f(x)}\frac{d}{dx}g(x)\,dx$$

We substitueren deze expressie in de bovenstaande vergelijking en we zien dat de tweede term en de vierde term wegvallen, en de integraalterm $\int_a^b p(x)\frac{d}{dx}\overline{f(x)}\frac{d}{dx}g(x)\,dx$ wordt in zowel de eerste en de derde term gevonden, en dus valt deze ook weg. Er blijven dus nog 2 termen over

$$\langle f, \hat{L}g\rangle - \langle \hat{L}f, g\rangle = \left[\overline{f(x)}p(x)\frac{d}{dx}g(x)\right]_a^b - \left[g(x)p(x)\frac{d}{dx}\overline{f(x)}\right]_a^b$$

$$= \overline{f(b)}p(b)g'(b) - \overline{f(a)}p(a)g'(a) - g(b)p(b)\overline{f'(b)} + g(a)p(a)\overline{f'(a)}$$

Doordat $\langle f, \hat{L}g\rangle = \langle \hat{L}^\dagger f, g\rangle$ moet deze expressie dus gelijk zijn aan nul als deze operator zelf-toegevoegd is.

$$0 = \overline{f(b)}p(b)g'(b) - \overline{f(a)}p(a)g'(a) - g(b)p(b)\overline{f'(b)} + g(a)p(a)\overline{f'(a)}$$

Als we de randvoorwaarden gebruiken vinden we doordat α en β reëel zijn inderdaad

$$\overline{f(b)}p(b)\beta g(b) - \overline{f(a)}p(a)\alpha g(a) - g(b)p(b)\overline{\beta f(b)} + g(a)p(a)\overline{\alpha f(a)}$$

$$= \beta\overline{f(b)}p(b)g(b) - \alpha\overline{f(a)}p(a)g(a) - \beta g(b)p(b)\overline{f(b)} + \alpha g(a)p(a)\overline{f(a)} = 0$$

En is de Sturm-Liouville-operator onder deze randvoorwaarden zelf-toegevoegd. $\square$

8.5 Twee fundamentele oplossingsmatrices verschillen op een constante matrix na (Proposition 8.13) (!)

Beschouw de eerste-orde vectorwaardige homogene differentiaalvergelijking

$$\frac{dz}{dt}(t) = A(t)z(t),$$

met $z(t) \in \mathbb{F}^n$ **en** $A(t) \in \mathbb{F}^{n\times n}$**. Laat** $Z(t)$ **een fundamentele oplossingsmatrix zijn, i.e. voor elke** t **geldt** $Z(t) \in \mathbb{F}^{n\times n}$ **zodanig dat**

$$\frac{dZ}{dt}(t) = A(t)Z(t),$$

met verder $\det(Z(t)) \neq 0$**, zodat de kolommen van** $Z(t)$ **overeenkomen met** n **lineair onafhankelijke oplossingen. Beschouw nu een andere fundamentele oplossingsmatrix** $\tilde{Z}(t)$**; toon aan dat er een constante matrix** $C \in \mathbb{F}^{n\times n}$ **bestaat zodat** $\tilde{Z}(t) = Z(t)C$**.** (Gebaseerd op *Proposition 8.13* **(!)**)

LET OP: dit was een vraag op het theorie-examen, 1^e zit academiejaar 2024-2025 !!

Bewijs. Aangezien $Z(t)$ en $\tilde{Z}(t)$ inverteerbaar zijn ($\Leftarrow \det(Z(t)) \neq 0$), kunnen we op elk tijdstip $C = Z^{-1}(t)\tilde{Z}(t)$ definiëren. Vervolgens lijden we deze C af naar de tijd.

$$\begin{aligned}
\frac{dC}{dt} &= \frac{d}{dt}[Z^{-1}(t)\tilde{Z}(t)] \\
&= -Z^{-1}(t)\frac{dZ}{dt}(t)Z^{-1}(t)\tilde{Z}(t) + Z^{-1}(t)\frac{d\tilde{Z}}{dt}(t) \\
&= -Z^{-1}(t)A(t)Z(t)Z^{-1}(t)\tilde{Z}(t) + Z^{-1}(t)A(t)\tilde{Z}(t) \\
&= -Z^{-1}(t)A(t)\tilde{Z}(t) + Z^{-1}(t)A(t)\tilde{Z}(t) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Dit betekent dat C inderdaad een constante is.

□

8.6 Het theorema van Floquet (Theorem 8.17) (!)

Beschouw de eerste-orde vectorwaardige homogene differentiaalvergelijking

$$\frac{dz}{dt}(t) = A(t)z(t),$$

met $z(t) \in \mathbb{F}^n$ **en** $A(t) \in \mathbb{F}^{n\times n}$**, waarbij bovendien** $A(t)$ **een periodieke functie is, i.e.** $A(t) = A(t+T)$ **met** T **de periode. Beschouw een fundamentele oplossingsmatrix** $Z(t)$ **zoals gedefinieerd in de vorige vraag. Bewijs het theorema van Floquet, namelijk dat** $Z(t)$ **kan worden uitgedrukt als**

$$Z(t) = Q(t)\exp(Bt),$$

waarbij $Q(t)$ **ook periodiek is met periode** T **en** B **een constante matrix is.**(Gebaseerd op *Theorem 8.17*)

LET OP: dit was een vraag op het theorie-examen, 1^e zit academiejaar 2024-2025 !!

Bewijs. Als $Z(t)$ een fundamentele oplossingsmatrix is, dan is $\tilde{Z}(t+T)$ dat ook, aangezien het voldoet aan:

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{Z}}{dt}(t) &= \frac{d}{dt}Z(t+T)\\ &= A(t+T)Z(t+T)\\ &= A(t)\tilde{Z}(t)\end{aligned}$$

Door het vorig bewijs (*Proposition 8.13*) weten we dat er een constante matrix C bestaat zodat $Z(t+T) = Z(t)C$, gegeven door:

$$C = Z^{-1}(t)Z(t+T)$$

Aangezien C inverteerbaar is, heeft het een logaritme, waarmee we $B = \frac{1}{T}\ln(C)$ definiëren zodat $C = e^{TB}$. Vervolgens kunnen we

$$Q(t) = Z(t)e^{-tB}$$

definiëren en vinden we

$$\begin{aligned}Q(t+T) &= Z(t+T)e^{-(t+T)B}\\ &= Z(t)Ce^{-TB}e^{-tb}\\ &= Z(t)Ce^{-\ln(C)}e^{-tb}\\ &= Z(t)e^{-tB}\\ &= Q(t)\end{aligned}$$

□

8.7 Abel's Formule (Remark 8.18)

Beschouw de tweede-orde scalairwaardige homogene differentiaalvergelijking

$$a_2(t)\ddot{u}(t) + a_1(t)\dot{u}(t) + a_0(t)u(t) = 0,$$

en beschouw twee oplossingen $u(t)$ en $v(t)$. Als de Wronskiaan wordt gedefinieerd als

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} u(t) & v(t) \\ \dot{u}(t) & \dot{v}(t) \end{pmatrix},$$

toon dan Abel's formule aan:

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(- \int_{t_0}^{t} \frac{a_1(\tau)}{a_2(\tau)} \, d\tau \right).$$

(Gebaseerd op *Remark 8.18.*)

Bewijs. Voor twee functies u_1 en u_2, wordt de Wronskiaan gegeven door

$$W(t) = u_1(t)\dot{u}_2(t) - \dot{u}_1(t)u_2(t).$$

Als beide functies voldoen aan de tweede-orde differentiaalvergelijking

$$a_2(t)\ddot{u}(t) + a_1(t)\dot{u}(t) + a_0(t)u(t) = 0,$$

dan kan men vinden dat:

$$\dot{W}(t) = u_1(t)\ddot{u}_2(t) - \ddot{u}_1(t)u_2(t)$$

Substitueert men vervolgens de tweede afgeleiden $\ddot{u}_1(t)$ en $\ddot{u}_2(t)$ door de tweede-orde differentiaalvergelijking te gaan omschrijven, dan kan men vinden dat:

$$\dot{W}(t) = -\frac{a_1(t)}{a_2(t)} \left(u_1(t)\dot{u}_2(t) - \dot{u}_1(t)u_2(t) \right) = -\frac{a_1(t)}{a_2(t)} W(t)$$

Abel's formule volgt dan door te integreren

$$\frac{d}{dt} \ln(W(t)) = W(t)^{-1}\dot{W}(t) = -\frac{a_1(t)}{a_2(t)}.$$

□

8.8 Algemene oplossing voor eerste orde beginwaardeprobleem (Proposition 8.18.) (!)

Beschouw het eerste-orde vectorwaardige beginwaardeprobleem

$$\frac{dz}{dt}(t) = A(t)z(t) + b(t), \quad z(0) = \zeta.$$

Laat $Z(t, t_0)$ de principale fundamentele oplossingsmatrix van de homogene differentiaalvergelijking zijn, i.e. voor elke t_0 is $Z(t, t_0)$ de fundamentele oplossingsmatrix die voldoet aan

$$\frac{dZ}{dt}(t, t_0) = A(t)Z(t, t_0),$$

met $Z(t_0, t_0) = I$, de identiteitsmatrix. Verifieer dat de oplossing van het beginwaardeprobleem wordt gegeven door

$$z(t) = Z(t, 0)\zeta + \int_0^t Z(t, s)b(s)\,ds,$$

waarbij je eventueel gebruik kunt maken van het feit dat

$$\frac{d}{dt}\int_a^t f(t, s)\,ds = f(t, t) + \int_a^t \frac{\partial f(t, s)}{\partial t}\,ds.$$

(Gebaseerd op *Proposition 8.18.*)

LET OP: dit was een vraag op het theorie-examen, 1^e zit academiejaar 2024-2025 !!

Bewijs. Voor de controle vult men simpel weg de oplossing in en maakt gebruikten van de gegeven gelijkheid. Hieronder wordt uiteengedaan hoe deze oplossing opgesteld kan worden, eerst beginnen we met

$$\frac{dz}{dt}(t) = A(t)z(t) + \mathbf{b}(t), \quad z(0) = \boldsymbol{\zeta}$$

te integreren van tijd 0 tot een arbitraire tijd t. Dit resulteert in:

$$z(t) - (\hat{K}z)(t) = \boldsymbol{\zeta} + \int_0^t \mathbf{b}(s)ds$$

Hierbij hebben we de integraaloperator $\hat{K}$ gebruikt, zoals gedefineerd in 8.2.1:

$$(\hat{K}z)(t) = \int_c^t A(s)z(s)ds = \int_a^b K(t, s)z(s)ds$$

met

$$K(t, s) = \begin{cases} A(s)H(t-s)H(s-c), & t \geq c \\ A(s)H(s-t)H(c-s), & t < c \end{cases}$$

De oplossing van deze integraalvergelijking kan men krijgen door

$$\hat{1} - \hat{K}$$

te inverteren en op de tijdsafhankelijke vector

$$t \mapsto \boldsymbol{\zeta} + \int_0^t \mathbf{b}(s)ds$$

te laten inwerken. Men kan dit ook intuïtief inzien als een soort Taylor expansie van $1/(1-K)$, oftewel:

$$(\hat{1} - \hat{K})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{K}^n$$

De inverse correspondeert exact met Z(t,0), zodat we vinden dat:

$$\begin{aligned}
z(t) &= Z(t,0)\boldsymbol{\zeta} + \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^t \mathrm{d}t_1 \int_0^{t_1} \mathrm{d}t_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} \mathrm{d}t_n \int_0^{t_n} \mathrm{d}s\, A(t_1)A(t_2)\cdots A(t_n)\mathbf{b}(s) \\
&= Z(t,0)\boldsymbol{\zeta} + \int_0^t \mathrm{d}s \sum_{n=0}^{+\infty} \int_s^t \mathrm{d}t_1 \int_s^{t_1} \mathrm{d}t_2 \cdots \int_s^{t_{n-1}} \mathrm{d}t_n A(t_1)A(t_2)\cdots A(t_n)\mathbf{b}(s) \\
&= Z(t,0)\boldsymbol{\zeta} + \int_0^t Z(t,s)\mathbf{b}(s)\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

$\square$

8.9 Oplossingsruimte tweede-orde homogene randvoorwaardeprobleem (Subsection 8.3.1)

Gegeven een tweede-orde lineaire differentiaaloperator $\hat{L}$ die werkt als

$$(\hat{L}u)(x) = a_2(x)\frac{d^2u}{dx^2}(x) + a_1(x)\frac{du}{dx}(x) + a_0(x)u(x).$$

Beschouw de homogene differentiaalvergelijking $(\hat{L}u)(x) = 0$ met gescheiden homogene randvoorwaarden

$$u(a) + \alpha u'(a) = 0, \quad u(b) + \beta u'(b) = 0.$$

Leg uit waarom de oplossingsruimte van dit volledig homogene randvoorwaardeprobleem ten hoogste één-dimensionaal kan zijn. (Gebaseerd op *Subsection 8.3.1*)

Bewijs. Voor gescheiden randvoorwaarden, de oplossingsruimte kan maximaal één-dimensionaal zijn. Als voor twee lineair onafhankelijke fundamentele oplossingen u_1 en u_2 beide $B_1[u_1] = 0$ en $B_1[u_2] = 0$ zouden voldoen, dan zouden beide vectoren $[u_1(a), u_1'(a)]^T$ en $[u_2(a), u_2'(a)]^T$ in de kern van een twee dimensionale lineaire vorm zijn, die een dimensionaal is. Dus, beide vectoren zouden lineair afhankelijk zijn, wat in tegenspraak is met u_1 en u_2 die lineair onafhankelijke oplossing zijn, omdat dit geldig is op elk punt x, de Wronskiaan $W(x) = u_1(x)u_2'(x) - u_2(x)u_1'(x) \neq 0$. $\square$

8.10 Particuliere oplossing m.b.v. Greense functie

Gegeven de tweede-orde lineaire differentiaaloperator $\hat{L}$ die werkt als

$$(\hat{L}u)(x) = a_2(x)\frac{d^2u}{dx^2} + a_1(x)\frac{du}{dx} + a_0(x)u(x).$$

Beschouw de inhomogene differentiaalvergelijking $(\hat{L}u)(x) = f(x)$ met gescheiden homogene randvoorwaarden $u(a) + \alpha u'(a) = 0$ en $u(b) + \beta u'(b) = 0$. Laat $u_a(x)$ en $u_b(x)$ twee oplossingen zijn van de homogene differentiaalvergelijking $(\hat{L}u_a)(x) = 0 = (\hat{L}u_b)(x)$ die zo gekozen zijn dat $u_a(a) + \alpha u_a'(a) = 0$ en $u_b(b) + \beta u_b'(b) = 0$. Neem aan dat $u_a(x)$ en $u_b(x)$ lineair onafhankelijke oplossingen zijn, zodat

$$W(x) = \det\begin{pmatrix} u_a(x) & u_b(x) \\ u_a'(x) & u_b'(x) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Toon aan dat

$$u_f(x) = \int_a^b g(x,y)f(y)\,dy,$$

met

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{u_a(x)u_b(y)}{a_2(y)W(y)}, & a < x < y, \\ \frac{u_a(y)u_b(x)}{a_2(y)W(y)}, & y < x < b, \end{cases}$$

een particuliere oplossing is van de inhomogene differentiaalvergelijking met homogene randvoorwaarden.

Bewijs. Om na te gaan dat

$$u_f(x) = \int_a^b g(x,y)f(y)\,dy,$$

een oplossing is van de opgegeven differentiaal vergelijking:

$$(\hat{L}u)(x) = a_2(x)\frac{d^2u}{dx^2} + a_1(x)\frac{du}{dx} + a_0(x)u(x).$$

kan men de oplossing invullen in de differentiaal vergelijking, dit geeft dan:

$$\begin{aligned}(\hat{L}u_f)(x) &= \int_a^b f(y)(\hat{L}g)(x,y)dy \\ &= \int_a^b f(y)\left[a_2(x)\frac{d^2g(x,y)}{dx^2} + a_1(x)\frac{dg(x,y)}{dx} + a_0(x)g(x,y)\right]dy\end{aligned}$$

De Greense werd zodanig geconstrueerd zodat $(\hat{L}g)(x,y) = \delta(x-y)$, dit kan men ook inzien door de verschillende gevallen te beschouwen:

1. **Geval 1:** $x < y$
   Uit de opgave weet men dat voor $x < y$, de Greense functie $g(x,y) = \frac{u_a(x)u_b(y)}{a_2(y)W(y)}$, dan volgt dat:
   $$\hat{L}\left(\frac{u_a(x)u_b(y)}{a_2(y)W(y)}\right) = \frac{u_b(y)}{a_2(y)W(y)}\hat{L}(u_a(x))$$
   Men weet dat $u_a(x)$, oplossing is van de homogene differentiaal vergelijking, ($\Rightarrow \hat{L}(u_a(x)) = 0$) en dus volgt dat $(\hat{L}g)(x,y) = 0$ voor $x < y$.

2. **Geval 2:** $x > y$
   Analoog als bovenstaande voor de tweede deel van de Greense functie.

3. **Geval 3:** $x = y$
   Voor $x \to y^-$: $\hat{L}\left(\frac{u_a(x)u_b(y)}{a_2(y)W(y)}\right)$
   Voor $x \to y^+$: $\hat{L}\left(\frac{u_a(y)u_b(x)}{a_2(y)W(y)}\right)$
   De sprong op $x = y$ worden gegeven door:

$$\frac{\partial g(x,y^-)}{\partial x} - \frac{\partial g(x,y^+)}{\partial x} = \frac{u_a'(x)u_b(x) - u_a(x)u_b'(x)}{a_2(x)W(x)} = \frac{1}{a_2(x)}$$

   Hierbij is $1/a_2(x)$, een normalisatie constante, zodat $g(x,x) = 1$.

Nu kan men dus inderdaad vinden door $(\hat{L}g)(x,y) = \delta(x-y)$, te stellen dat de opgegeven oplossing inderdaad een oplossing is van inhomogene differentiaal vergelijking $(\hat{L}u_f)(x) = f(x)$.

$$(\hat{L}u_f)(x) = \int_a^b f(y)(\hat{L}g)(x,y)dy = \int_a^b f(y)\delta(x-y)dy = f(x)$$

$\square$

9 Fourieranalyse en Distributietheorie

9.1 Eigenschappen van de fouriertransformatie (Subsection 9.1.1.)

1. **De Fouriertransformatie van een functie $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ wordt gegeven door**

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i2\pi\xi x}\, dx.$$

Toon aan dat, voor $g(x) = f(x)e^{-i2\pi a x}$, we bekomen dat

$$\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi + a).$$

Bewijs.

$$\hat{g}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-i2\pi\xi x}dx$$

Waarbij $\hat{g}(x) = f(x)e^{-i2\pi a x}$, dus vinden we gemakkelijk wat we willen bewijzen.

$$\begin{aligned}\hat{g}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i2\pi a x}e^{-i2\pi\xi x}dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i2\pi x(\xi+a)}dx \\ &= \hat{f}(\xi + a)\end{aligned}$$

□

2. **De Fouriertransformatie van een functie $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ wordt gegeven door**

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i2\pi\xi x}\, dx.$$

Toon aan dat, voor $g(x) = f(x - a)$, we bekomen dat

$$\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi)e^{-i2\pi a\xi}.$$

Bewijs. Als $g(x) = f(x - a)$, dan is

$$\begin{aligned}\hat{g}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-i2\pi x\xi}dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-a)e^{-i2\pi x\xi}dx\end{aligned}$$

We substitueren $t = x - a \Rightarrow dt = dx$

$$\begin{aligned}&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi(t+a)\xi}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi a\xi}e^{-i2\pi t\xi}dt \\ &= e^{-i2\pi a\xi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi t\xi}dt\end{aligned}$$

We vinden dus wat we willen bewijzen

$$\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi)e^{-i2\pi a\xi}$$

□

3. **De Fouriertransformatie van een functie $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ wordt gegeven door**

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i2\pi\xi x}\, dx.$$

Toon aan dat, voor $g(x) = f(-x)$, we bekomen dat

$$\hat{g}(\xi) = \hat{f}(-\xi).$$

Bewijs. We weten dat $g(x) = \overline{f(-x)}$, dus vinden we

$$\widehat{g}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-i2\pi\xi x}\, dx.$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(-x)}e^{-i2\pi\xi x}\, dx.$$

We substitueren $-x = u \Rightarrow -dx = du$

$$= \int_{\infty}^{-\infty} \overline{f(u)}e^{-i2\pi\xi(-u)}(-du).$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(u)}e^{i2\pi\xi u}\, du.$$

We weten dat

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i2\pi\xi u}\, du.$$

Dus is

$$\overline{\widehat{f}(\xi)} = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(u)}e^{i2\pi\xi u}\, du.$$

En dit is exact wat we vonden voor $\widehat{g}(\xi)$, dus

$$\widehat{g}(\xi) = \overline{\widehat{f}(\xi)}$$

□

4. **De Fouriertransformatie van een functie $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ wordt gegeven door**

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i2\pi\xi x}\,dx.$$

Toon aan dat, voor $g(x) = f\left(\frac{x}{a}\right)$, we bekomen dat

$$\hat{g}(\xi) = |a|\hat{f}(a\xi).$$

Bewijs. We weten dat $g(x) = f\left(\frac{x}{a}\right)$, dus

$$\widehat{g}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-i2\pi\xi x}\,dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{x}{a}\right) e^{-i2\pi\xi x}\,dx$$

We substitueren voor $\frac{x}{a} = t \Rightarrow dx = |a| \cdot dt$ (absolute waarde doordat a positief of negatief kan zijn)

$$= |a| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi\xi at}\,dt$$
$$= |a|\widehat{f}(a\xi)$$

We vinden dus wat we willen bewijzen

$$\widehat{g}(\xi) = |a|\widehat{f}(a\xi)$$

□

5. **De Fouriertransformatie van een functie $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ wordt gegeven door**

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i2\pi\xi x}\,dx.$$

Toon aan dat, voor $h(x) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)\,dy$ met $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ en (zonder bewijs) ook $h \in L^1(\mathbb{R})$, we vinden dat

$$\hat{h}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).$$

Bewijs. Dit volgt opnieuw uit een eenvoudige expliciete berekening, gebruikmakend van de **stelling van Fubini**, die zegt dat de integratie volgorde mag omgedraaid worden):

$$\begin{aligned}
\hat{h}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy\right) e^{-i2\pi\xi x}dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\, e^{-i2\pi\xi(x-y)}e^{-i2\pi\xi y}\,dy\right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)e^{-i2\pi\xi(x-y)}d(x-y)\right) g(y)e^{-i2\pi\xi y}dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)g(y)e^{-i2\pi\xi y}dy \\
&= \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).
\end{aligned}$$

□

6. **De Fouriertransformatie van een functie** $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ **wordt gegeven door**

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i2\pi\xi x}\, dx.$$

Wat is de Fouriertransformatie $\hat{g}(\omega)$ **van de functie** $g(t) = f'(t)$ **met** $f \in L^1(\mathbb{R})$ **zodanig dat** $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ **en** $f' \in L^1(\mathbb{R})$**?**(niet verbeterd)

Bewijs. We weten dat $g(t) = f'(t)$, dus is

$$\begin{aligned}\widehat{g}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\omega t}\, dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-i\omega t}\, dt\end{aligned}$$

We gebruiken partiële integratie met $u = e^{-i\omega t}$ en $dv = f'(t)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\left[f(t) e^{-i\omega t} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(-i\omega t) e^{-i\omega t}\, dt \right)$$

Waarvoor $\lim\limits_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$, dus

$$\begin{aligned} &= i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt \\ &= i\omega \widehat{f}(\omega)\end{aligned}$$

We vinden een expressie voor $\widehat{g}(\xi)$, namelijk

$$\widehat{g}(\omega) = i\omega \widehat{f}(\omega)$$

□

9.2 Implicaties van de Parsevalrelatie voor de Fourier-operator $\mathcal{F}$ (Subsection 9.1.2)

Gegeven de (Plancherel)-Fouriertransformatie van een functie $f(x) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$

$$\hat{f}(\xi) = (\mathcal{F}f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i2\pi\xi x}\, dx.$$

Wat leert de Parsevalrelatie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\, dx$$

(zonder bewijs) u over de aard van de Plancherel-Fourier-operator $\mathcal{F}$?(Gebaseerd op *Subsection 9.1.2*)

Bewijs. De Parsevalrelatie impliceert dat $\hat{F}$ een isometrische operator is ($\hat{F}^\dagger \hat{F} = \hat{1}$. Er geldt namelijk:

$$\begin{aligned}
\left|\left|\hat{F}f(x)\right|\right|_2 &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\hat{F}f(x)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \\
&= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\hat{f}(x)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \\
&= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \\
&= ||f(x)||_2 .
\end{aligned}$$

Met andere woorden, de 2-norm van f blijft behouden na toepassing van de operator $\hat{F}$. Echter, op dezelfde manier kunnen we ook aantonen dat $\hat{F}^\dagger$ ook isometrisch is ($\left|\left|\hat{F}^\dagger \hat{f}(\xi)\right|\right|_2 = \left|\left|\hat{f}(\xi)\right|\right|_2$ voor alle $\hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})$). We krijgen dus ook dat $\hat{F}\hat{F}^\dagger = \hat{1}$, waardoor $\hat{F}^\dagger = \hat{F}^{-1}$. We kunnen dus concluderen dat $\hat{F}$ een unitaire operator moet zijn. □

9.3 Afleiding uit de karakteristieke functie voor genormaliseerde Gaussische distributie (Subsection 9.1.3)

Gegeven de genormaliseerde Gaussische distributie met gemiddelde μ en standaardafwijking σ

$$f_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right].$$

Toon aan de karakteristieke functie

$$\phi_{\mu,\sigma}(\xi) = \langle \exp(-i2\pi\xi X)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-i2\pi\xi x - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx$$

voldoet aan

$$\log(\phi_{\mu,\sigma}(\xi)) = -i2\pi\xi\mu - (2\pi\xi)^2\sigma^2.$$

(Gebaseerd op *Subsection 9.1.3*)

Bewijs. Om het gevraagde aan te tonen moet men de ln( ) van de uitdrukking voor $\varphi_{\mu,\sigma}$ vinden, dit doet men door eerste de integraal uit de gegeven uitdrukking voor $\varphi_{\mu,\sigma}$, uit te rekenen, om te schrijven naar een makkelijk op te lossen, differentiaalvergelijking.

$$\varphi_{\mu,\sigma}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\mathrm{i}2\pi\xi x - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{d}{d\xi}\left(\varphi_{\mu,\sigma}(\xi)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{+\infty} (-\mathrm{i}2\pi x)\, e^{-\mathrm{i}2\pi\xi x - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Men kan afleiden uit de kettingregel dat het integrandum kan herschreven worden als:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}(e^{-\mathrm{i}2\pi\xi x - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}) = \left[-\mathrm{i}2\pi\xi - \frac{(x-\mu)}{\sigma^2}\right] e^{-\mathrm{i}2\pi\xi x - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \\
\Longleftrightarrow \quad & -\frac{x}{\sigma^2} e^{-\mathrm{i}2\pi\xi x - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \left[\frac{d}{dx}(e^{-\mathrm{i}2\pi\xi x - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}) + \mathrm{i}2\pi\xi e^{-\mathrm{i}2\pi\xi x - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} - \frac{\mu}{\sigma^2} e^{-\mathrm{i}2\pi\xi x - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right] \\
\Longleftrightarrow \quad & (-\mathrm{i}2\pi x)\, e^{-\mathrm{i}2\pi\xi x - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \mathrm{i}2\pi\sigma^2 \left[\frac{d}{dx}(e^{-\mathrm{i}2\pi\xi x - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}) + \mathrm{i}2\pi\xi e^{-\mathrm{i}2\pi\xi x - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} - \frac{\mu}{\sigma^2} e^{-\mathrm{i}2\pi\xi x - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right]
\end{aligned}$$

De integraal kan opgesplitst worden in drie kleinere integralen:

$$\begin{cases}
\frac{\mathrm{i}2\pi\sigma^2}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx}(e^{-\mathrm{i}2\pi\xi x - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}) dx = 0 \\
\frac{\mathrm{i}2\pi\sigma^2}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{i}2\pi\xi e^{-\mathrm{i}2\pi\xi x - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = -\frac{4\pi^2\xi\sigma}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi}\sigma\varphi_{\mu,\sigma}(\xi) \\
\frac{\mathrm{i}2\pi\sigma^2}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-\mu}{\sigma^2}\xi e^{-\mathrm{i}2\pi\xi x - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{-\mu\mathrm{i}2\pi}{\sqrt{2\pi\sigma}} \sqrt{2\pi}\sigma\varphi_{\mu,\sigma}(\xi)
\end{cases}$$

Dit leidt dus to een uitdrukking voor $\frac{d}{d\xi}\left(\varphi_{\mu,\sigma}(\xi)\right)$, van:

$$\frac{d}{d\xi}\left(\varphi_{\mu,\sigma}(\xi)\right) = (-4\pi^2\sigma^2\xi - 2\pi\mathrm{i}\mu)\varphi_{\mu,\sigma}(\xi)$$

De oplossing van deze bekomen differentiaalvergelijking moet een exponentiële vorm hebben en er kan logischerwijze ingezien worden een oplossing van deze differentiaalvergelijking gegeven wordt door:

$$\begin{aligned} & \varphi_{\mu,\sigma}(\xi) = \exp(-4\pi^2\sigma^2\xi - 2\pi \mathrm{i}\mu) \\ \implies \quad & \ln(\varphi_{\mu,\sigma}(\xi)) = -4\pi^2\sigma^2\xi - 2\pi \mathrm{i}\mu \end{aligned}$$

□

9.4 Centraal limiet theorema (Subsection 9.1.3)

Gegegeven n onafhankelijke stochastische variabelen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ met identieke probabiliteitsdistributie $f_1(x) = f_2(x) = \ldots = f_n(x)$ waarvan de bijbehorende karakteristieke functie $\phi_i(\xi)$ voldoet aan (eveneens onafhankelijk van i):

$$\phi_i(\xi) = \mu(-i2\pi\xi) + \frac{\sigma^2}{2}(-i2\pi\xi)^2 + \frac{\kappa_3}{3!}(-i2\pi\xi)^3 + O(\xi^4).$$

Toon aan dat de karakteristieke functie van de probabiliteitsdistributie van de nieuwe stochastische variabele

$$X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

voldoet aan

$$\log(\phi(\xi)) = \mu(-i2\pi\xi) + \frac{(\sigma/\sqrt{n})^2}{2}(-i2\pi\xi)^2 + O\left(\frac{\xi^3}{n^2}\right).$$

(Gebaseerd op *Subsection 9.1.3*)

Bewijs. Uit het gegeven weet men dat de stochastische variabelen, $X_1, X_2, ..., X_n$ met hun respectievelijke probabiliteit verdeling, $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ en dus weet men ook dat hun $\varphi_i(\xi)$, dezelfde moeten zijn, aangezien de $f_i(x)$, voor alle variabelen dezelfde verdelingen is, met eenzelfde μ en σ (dit hoeft niet per se een Gaussische/Normaalverdeling te zijn), hierbij is $\ln(\varphi_i(\xi))$, gegeven door:

$$\ln(\varphi_i(\xi)) = \mu(-\mathrm{i}2\pi\xi) + \frac{\sigma^2}{2}(-\mathrm{i}2\pi\xi)^2 + \frac{\kappa_3}{3!}(-\mathrm{i}2\pi\xi)^3 + \mathcal{O}(\xi^4)$$

Definieert men nu een nieuwe stochastische variabele $X = \frac{1}{n}\sum_i^n X_i$, als zijnde het gemiddelde van stochastische variabelen, dan wordt zijn karakteristieke vergelijking gegeven door:

$$\begin{aligned}\varphi_X(\xi) =< e^{-i2\pi\xi X} > &= \int dx_1 \int dx_2 \ ... \int dx_n e^{-i2\pi\xi(x_1+x_2+\ ...\ +x_n)/n} f_1(x) f_2(x) \ ... \ f_n(x) \\ &= \varphi_{X_1}(\xi/n)\varphi_{X_2}(\xi/n) \ ... \ \varphi_{X_n}(\xi/n) = (\varphi(\xi/n))^n\end{aligned}$$

Neemt men dan nu de ln( ), van de gevonden uitdrukking hierboven en vult men de gegeven uitdrukking voor een $\ln(\varphi_i)$, dan vindt men het gevraagde, namelijk:

$$\begin{aligned}\ln(\varphi_X(\xi)) &= n\ln(\varphi(\xi/n)) \\ &= n\left[\mu\left(-\mathrm{i}2\pi\frac{\xi}{n}\right) + \frac{\sigma^2}{2}\left(-\mathrm{i}2\pi\frac{\xi}{n}\right)^2 + \mathcal{O}(\xi^3)\right] \\ &= \mu\left(-\mathrm{i}2\pi\xi\right) - 2\pi\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\xi^2 + \mathcal{O}(\xi^3/n^2)\end{aligned}$$

□

9.5 Distributionele afgeleide van de Heaviside-distributie (Example 9.11, 9.12, 9.13)

Beschouw de verschoven Heaviside-distributie $H_a[\phi] = \int_a^{+\infty} \phi(x)\,dx$. Toon aan dat de distributionele afgeleide voldoet aan

$$H'_a = \delta_a, \quad \textbf{met } \delta_a[\phi] = \phi(a) \textbf{ de verschoven Diracdistributie}.$$

(Gebaseeerd op *Example 9.11, 9.12, 9.13*)

Bewijs. De distributionele afgeleide H'_a wordt gedefinieerd door (volgens definitie 9.14):

$$H'_a[\varphi] = -H_a[\varphi'],$$

waarbij φ' de gewone afgeleide van φ is. Vervang de uitdrukking voor $H_a[\varphi']$:

$$H_a[\varphi'] = \int_a^{+\infty} \varphi'(x)\,dx.$$

Gebruik nu de eigenschap van de integraal van een afgeleide:

$$\int_a^{+\infty} \varphi'(x)\,dx = [\varphi(x)]_a^{+\infty}.$$

Omdat $\varphi(x) = 0$ voor $x \to +\infty$ (testfuncties hebben compacte drager en zijn dus nul buiten een bepaald interval), wordt dit:

$$\int_a^{+\infty} \varphi'(x)\,dx = -\varphi(a).$$

Substitueer dit resultaat in de definitie van H'_a:

$$H'_a[\varphi] = -\left(-\varphi(a)\right) = \varphi(a).$$

De verschoven Dirac-distributie δ_a wordt gedefinieerd als volgens example 9.9):

$$\delta_a[\varphi] = \varphi(a).$$

Uit bovenstaande volgt:

$$H'_a[\varphi] = \delta_a[\varphi].$$

□

9.6 Fourierreekscoëfficiënten en de zaagtand functie

Gegeven de zogenaamde zaagtandfunctie, gegeven door de periodieke uitbreiding van $f : [0, 2\pi) \to \mathbb{R} : x \mapsto x - \pi$, i.e. de functie die gegeven wordt door

$$f(x) = x - \pi - 2\pi \left\lfloor \frac{x}{2\pi} \right\rfloor = x - \pi - 2\pi n \quad \textbf{als } x \in [2\pi n, 2\pi(n+1)) \textbf{ met } n \in \mathbb{Z}$$

$$= (x-\pi) + \sum_{n=-\infty}^{0} 2\pi H(2\pi n - x) - \sum_{n=1}^{+\infty} 2\pi H(x - 2\pi n).$$

Bereken de Fourierreekscoëfficiënten $\hat{f}_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx$ uit de Fourierreeks

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_k e^{ikx}$$

en gebruik dit resultaat en het resultaat uit de vorige vraag om aan te tonen dat

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ikx} = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(x - 2\pi n).$$

Bewijs. De periodiciteit van de functie $f(x)$ maakt het mogelijk om de Fouriercoëfficiënten $\hat{f}_k$ te berekenen door enkel over één periode van $f(x)$ te integreren. Omdat de functie zich op regelmatige wijze herhaalt, geldt:

$$\int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx = \int_{2\pi}^{4\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx = \dots$$

Het integreren over één interval van lengte $L = 2\pi$ is dus voldoende om alle Fouriercoëfficiënten $\hat{f}_k$ te bepalen. De periodiciteit zorgt ervoor dat dit interval alle noodzakelijke informatie bevat. Met andere woorden: aangezien $f(x)$ periodiek is, is ook $\hat{f}_k$ periodiek over hetzelfde interval. De Fouriercoëfficiënten worden dus gemakkelijk bepaald als:

$$\hat{f}_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} (x - \pi) e^{-ikx}\, dx$$

Dit heeft dan als oplossingen dat:

$$\begin{cases} \hat{f}_0 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[(x-\pi)^2\right]_0^{2\pi} = 0 \\ \hat{f}_k &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\left[\frac{(x-\pi)e^{-ikx}}{-ik} \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{ik} \int_0^{2\pi} e^{-ikx}\, dx \right) = -\frac{\sqrt{2\pi}}{ik} \end{cases}$$

Hiermee kunnen we dan vinden dat de Fourierreeks gegeven wordt door:

$$f(x) = \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq 0}} -\frac{e^{ikx}}{ik}.$$

We hebben nu twee representaties van $f(x)$. Als we $f(x)$ afleiden, kunnen de afgeleiden van deze twee representaties met elkaar vergeleken worden. Hierbij gaan we gebruik maken van het vorige bewijs, dat inhield dat $H_a'[\varphi] = \delta_a[\varphi]$ voor een willekuerige testfunctie φ. Door af te leiden, vinden we:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\left((x-\pi) + \sum_{n=-\infty}^{0} 2\pi H(2\pi n - x) - \sum_{n=1}^{+\infty} 2\pi H(x - 2\pi n)\right)\\
&= 1 + \sum_{n=-\infty}^{0} 2\pi H'(2\pi n - x) - \sum_{n=1}^{+\infty} 2\pi H'(x - 2\pi n)\\
&= 1 + \sum_{n=-\infty}^{0} 2\pi H'[-\varphi] - \sum_{n=1}^{+\infty} 2\pi H'[\varphi] \qquad (\varphi = x - 2n\pi)\\
&= 1 - \sum_{n=-\infty}^{0} 2\pi \delta[\varphi] - \sum_{n=1}^{+\infty} 2\pi \delta[\varphi]\\
&= 1 - \sum_{n=-\infty}^{0} 2\pi \delta(x - 2\pi n) - \sum_{n=1}^{+\infty} 2\pi \delta(x - 2\pi n)\\
&= 1 - \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2\pi \delta(x - 2\pi n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\k\neq 0}} -\frac{e^{ikx}}{ik}\right)\\
&= -\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\k\neq 0}} e^{ikx}
\end{aligned}$$

Nu kunnen we ze aan elkaar gelijkstellen om te zien dat:

$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\k\neq 0}} e^{ikx} = -1 + \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2\pi\delta(x - 2\pi n)$$

We kunnen ook makkelijk berekenen dat $e^{ikx} = 1$ (voor $k = 0$). Hierdoor kunnen we het nog een laatste keer herschrijven naar:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ikx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2\pi\delta(x - 2\pi n).$$

Dit is precies hetgeen dat we wouden bewijzen. $\square$

9.7 Sokhotski-Plemelj (Theorem 9.15)

Gebruik het resultaat uit vraag 10, en het feit dat de distributionele afgeleide van de reguliere distributie T_f geassocieerd aan $f(x) = \log(|x|)$ gegeven wordt door

$$T_f' = \textbf{P.v. } \frac{1}{x},$$

om de Sokhotsky-Plemelj-formule aan te tonen:

$$\lim_{s\to 0^+} \frac{1}{x \pm is} = \textbf{P.v. } \frac{1}{x} \mp i\pi\delta(x).$$

(Gebaseerd op *Theorem 9.15*)

Bewijs. Men weet dat de distributionele afgeleide van de reguliere distributie T_f, geassocieerd aan $f(x) = log(|x|)$, wordt gegeven door $T_f' = Pv\frac{1}{x}$ en de distributionele afgeleide van de verschoven Heaviside distributie voldoet aan $H_a' = \delta_a$

Als we de complexe logaritme functie beschouwen valt ons op dat dit een meerwaardige functie is (in het complexe vlak). Daarom gaan we enkel kijken naar de hoofdtak ("principal branch") (zie wikipedia: `https://en.wikipedia.org/wiki/Principal_branch`) van deze functie zodat deze injectief wordt. Deze functie is gedefinieerd voor alle z $\in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ (alle complexe getallen behalve de negatieve reële getallen). Er geldt dus:

$$z = re^{i\phi} \tag{87}$$

met r $= |z| \in [0, +\infty)$ en met $\phi = arg(z) \in (-\pi, +\pi)$. De functie wordt voorgesteld als:

$$log(z) = log(r) + i\phi \tag{88}$$

We beschouwen nu een complex getal $z = x \pm is$ met $x \in \mathbb{R}_{\neq 0}, s \in \mathbb{R}_{>0}$. Er geldt vervolgens:

$$\lim_{s\to 0^+} log(x \pm is) = \lim_{s\to 0^+} (log(|x \pm is|) + i \cdot arg(x \pm is)) \tag{89}$$

In deze limiet zal $\lim_{s\to 0^+}(log(|x \pm is|) = log(|x|)$. Voor de tweede term hebben we drie mogelijkheden: als $x > 0$ dan zal $\lim_{s\to 0^+} arg(x \pm is)) = 0$, als $x < 0$ en we hebben $+is$ dan zal $\lim_{s\to 0^+} arg(x + is)) = \pi$, als $x < 0$ en we hebben $-is$ dan zal $\lim_{s\to 0^+} arg(x - is)) = -\pi$. Nu kunnen we de uitdrukking vereenvoudigen door gebruik te maken van de Heaviside-functie:

$$H(-x) = \begin{cases} 1, x < 0 \\ 0, x > 0 \end{cases} \tag{90}$$

Nu combineren we 89 en 90:

$$\lim_{s\to 0^+} log(x \pm is) = log(|x|) \pm i\pi H(-x) \tag{91}$$

Dan vinden we de gezochte uitdrukking uit de afgeleide:

$$\begin{aligned} \lim_{s\to 0^+} log(x \pm is)' &= \lim_{s\to 0^+} (\frac{1}{x \pm is}) \\ &= (log(|x|) \pm i\pi H(-x))' \\ &= Pv\frac{1}{x} \pm i\pi\delta(x) \end{aligned} \tag{92}$$

□

9.8 Fouriertranformatie van de heaviside-distributie (Example 9.24)

Gebruik het resultaat uit de vorige vraag om aan te tonen dat de distributionele Fouriertransformatie $\hat{H}$ van de Heaviside-distributie $H[\phi] = \int_0^{+\infty} \phi(x)\,dx$ gegeven wordt door

$$\hat{H}(\xi) = -\frac{i}{2\pi}\mathbf{P.v.}\ \frac{1}{\xi} + \frac{1}{2}\delta(\xi).$$

(Gebaseerd op *Example 9.24*)

Bewijs. Voor dit bewijs maakt men gebruik van het voorgaande bewijs, namelijk de Sokhotsky-Plemelj formule:

$$\lim_{s\to 0^+} \frac{1}{x \pm is} = \text{Pv}\ \frac{1}{x} \pm i\pi\delta(x). \tag{93}$$

We starten met H te regulariseren (schrijven in een betere beheersbare versie):

$$H = \lim_{s\to 0^+} e^{-sx}H(x) \tag{94}$$

met H(x):

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \tag{95}$$

Vervolgens bepalen we de distributionele Fouriertransformatie van de Heaviside-distributie:

$$\begin{aligned}
\hat{H}(\xi) &= \lim_{s\to 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sx}H(x)e^{-i2\pi\xi x}dx \\
&= \lim_{s\to 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(s+i2\pi\xi)x}H(x)dx \\
&= \lim_{s\to 0^+} \int_{-\infty}^{0} e^{-(s+i2\pi\xi)x}H(x)dx + \lim_{s\to 0^+} \int_{0}^{+\infty} e^{-(s+i2\pi\xi)x}H(x)dx \\
&= \lim_{s\to 0^+} \int_{0}^{+\infty} e^{-(s+i2\pi\xi)x}dx \\
&= \lim_{s\to 0^+} -\frac{1}{(s+i2\pi\xi)}[e^u]_0^{-\infty} \\
&= \lim_{s\to 0^+} \frac{1}{(s+i2\pi\xi)} \\
&= -i\lim_{s\to 0^+} \frac{1}{(2\pi\xi - is)} = \frac{-i}{2\pi}Pv\frac{1}{\xi} + \pi\delta(2\pi\xi) = \frac{-i}{2\pi}Pv\frac{1}{\xi} + \frac{1}{2}\delta(\xi)
\end{aligned} \tag{96}$$

□