EXAMEN DISCRETE WISKUNDE II

VRIJDAG 2 SEPTEMBER 2022

Gebruik voor elke opgave een apart examenpapier.

Vermeld op elk blad je naam en het nummer van de opgave, schrijf op het eerste blad ook je stamnummer.

Het examen is *gesloten boek*. Theorie- en oefeningencursus en/of bijhorende geschreven notities mogen **niet** gebruikt worden.

Het gebruik van een rekentoestel is verboden, evenals het gebruik van een GSM, smartphone, tablet, computer of andere elektronische toestellen. Deze moeten *volledig uitgeschakeld* zijn.

VEEL SUCCES!

Opgaven

Opgave 1 (theorie; 3 punten)**.** Bepaal alle grafen die ten hoogste twee verschillende eigenwaarden hebben.

Opgave 2 (theorie; 3 punten)**.** Toon aan dat een koppeling K in een graaf Γ geen maximum koppeling is als en slechts als er twee verschillende onverzadigde toppen bestaan die verbonden kunnen worden door een pad dat alternerend bogen van $\Gamma - K$ en K bevat.

Opgave 3 (theorie; 4 punten)**.** Toon aan dat een niet-lege graaf $\Gamma = (V, E)$ een Cayleygraaf is als en slechts als Γ een groep G van automorfismen heeft die scherp transitief werkt op V.

Opgave 4 (oefening; 4 punten)**.** Gegeven zijn twee niet-lege, samenhangende (enkelvoudige) grafen Γ_1 en Γ_2 die geen toppen gemeen hebben, alsook twee toppen $v_1 \in V(\Gamma_1)$ en $v_2 \in V(\Gamma_2)$. Definieer de graaf Γ bestaande uit alle toppen en bogen van Γ_1 en Γ_2, samen met de boog v_1v_2. Je komt de volgende bewering tegen:

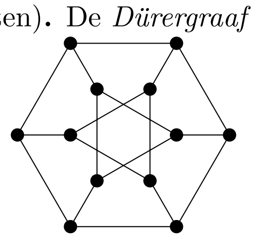
Γ_1 en Γ_2 zijn beide Euleriaans

$$\Longleftrightarrow$$

Γ is niet Euleriaans is maar bezit wel een Euleriaans pad **van $\boldsymbol{v_1}$ naar $\boldsymbol{v_2}$**.

(1) Is deze equivalentie correct? Indien wel, bewijs. Indien niet, geef aan welke van de twee implicaties al dan niet correct zijn en bewijs of geef een tegenvoorbeeld.
(2) Stel nu dat het vetgedrukte wordt verwijderd uit de uitspraak. Is de equivalentie in dat geval correct? Geef in dit geval opnieuw aan welke van de twee implicaties al dan niet correct zijn en bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

Opgave 5 (oefening; 6 punten)**.** De *Dürergraaf* Γ ziet er als volgt uit:



(1) Is deze graaf Hamiltoniaans? Beargumenteer waarom (niet).
(2) Toon aan dat $|\mathrm{Aut}(\Gamma)| = 12$ en lijst alle elementen van deze automorfismegroep op (denk aan draaiingen, spiegelingen...).
(3) Zij $P = \{\{v, w\} : v, w \in V(\Gamma)\}$, m.a.w. de verzameling van alle ongeordende paren (of singletons!) van toppen van Γ. Uit hoeveel banen bestaat P onder $\mathrm{Aut}(\Gamma)$?