Voorbeeldexamen Continue Optimalisatie

1. Gegeven is de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y)$ met

$$f(x, y) = a^2x^2 + (6a - 8)y^2 - 16x + 32y - 10.$$

Hierin is a een reële parameter met $a \neq 0$ en $a \neq \frac{4}{3}$.

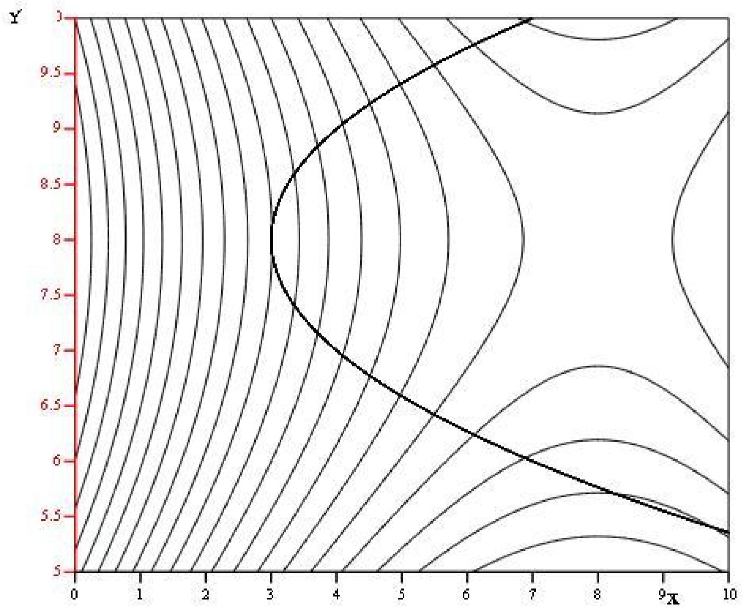
Gevraagd: (Tip: resultaten uit voorgaande onderdelen mogen gebruikt worden in volgende onderdelen)

(a) **Bereken** in functie van de parameter a de coördinaten van de punten P die voldoen aan de EONV voor de gegeven functie f.
Ga via de TOVV voor elk gevonden punt P **na** of het een (lokale) extremizer (welk?) dan wel een zadelpunt is. Ga vervolgens na of sommige van die lokale extremizers ook globaal zijn.
Formuleer je antwoord als een overzichtelijke tabel.

(b) Los volgend optimalisatievraagstuk op

$$\text{extremeer}_{(x,y)\in\Omega}\, x^2 - 2y^2 - 16x + 32y - 10 \quad \text{met} \quad \Omega = \{(x, y) \mid x \leq 10\}$$

(c) i. In onderstaande Figuur 1 zie je verschillende niveaulijnen van de functie f met $f(x, y) = x^2 - 2y^2 - 16x + 32y - 10$ en de grafiek van een restrictie impliciet gedefinieerd door $x - 3 = (y - 8)^2$.
Duid op deze figuur een punt T aan waarvoor de functie f onder deze nevenvoorwaarde $x - 3 - (y - 8)^2 = 0$ extremaal is. Zeg ook waarop je steunt om dit punt te kiezen. Kan je nog andere punten aanduiden? Vul indien nodig de figuur aan.



Figuur 1: enkele niveaulijnen van $f(x, y) = x^2 - 2y^2 - 16x + 32y - 10$ en de grafiek van de nevenvoorwaarde $x - 3 = (y - 8)^2$

ii. Optimaliseer (minimaliseer en/of maximaliseer) $x^2 - 2y^2 - 16x + 32y - 10$ onder de voorwaarde $x - 3 = (y - 8)^2$.

(d) Los op

$$\text{maximaliseer } x^2 - 2y^2 - 16x + 32y - 10$$
$$\text{onder de voorwaarden } (y-8)^2 \leq x - 3,\ x \leq 10.$$

2. Beschouw het LP-probleem

$$\begin{aligned} & \max 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{onder de voorwaarden} \quad & x_1 + 5x_2 + x_3 \leq b_1 \\ & x_1 - 5x_2 - 3x_3 \leq b_2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Gevraagd:

(a) Onderstel dat $b_1 > 0$, $b_2 > 0$. Formuleer het duale probleem en bepaal grafisch de optimale oplossing(en) naargelang de waarden van de parameters b_1 en b_2.

(b) Bepaal een waarde voor b_1 en een waarde voor b_2 in $\mathbb{R}$ zodat het primaire maximalisatieprobleem niet toegelaten is.

(c) Voor specifieke waarden van $b_1, b_2 \geq 0$ leidt het simplexalgoritme tot de volgende optimale tabel

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & b & 1 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & c & -4 & -1 & 1 & 10 \\ \hline 0 & a & 2 & d & e & 150 \end{array}$$

Bepaal de waarden van de parameters a, b, c, d, e, b_1 en b_2.