Feedback examen eerste zit

Wiskundige Structuren en Functies

1ste Bachelor Fysica en Sterrenkunde
Academiejaar 2022 – 2023

Vraag 1

Vraag 1(a)

Formuleer en toon de extremumstelling van Weierstrass aan. Uw bewijs mag gebruikmaken van het volgende lemma (…).

Als f continu is over het compact interval $I = [a, b]$, dan bereikt f/I minstens één keer haar kleinste waarde en minstens één keer haar grootste waarde, m.a.w. er bestaan x_1 en x_2 in I waarvoor

$$f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2), \qquad \forall x \in I.$$

Bewijs: letterlijk in de cursus (pag. 39-40)

Vraag 1(b)

Zij f afleidbaar op $\mathbb{R}$ met $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Toon aan dat er minstens één $c \in \mathbb{R}$ bestaat waarvoor $f'(c) = 0$ (verwijs naar passende stellingen).

Veralgemening van stelling van Rolle. Maar die is alleen van toepassing voor functies op een compact interval, en niet voor functies met een onbegrensd domain $\mathbb{R}$. Nieuw bewijs is nodig.

Meest logische oplossing: aanpassing van het eerste deel van het bewijs van stelling 3.1.17.

Te bewijzen: als f continu is op $\mathbb{R}$ en $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, dan bestaat er een $c \in \mathbb{R}$ met $f(c) = \max_{\mathbb{R}} f$ of bestaat er een $c \in \mathbb{R}$ met $f(c) = \min_{\mathbb{R}} f$.

Vraag 1(b)

Bewijs: geval 1: $f(x) = 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Dan is de stelling bewezen. Veronderstel dus dat $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ met $f(x_0) \neq 0$. Veronderstellen dat $f(x_0) > 0$ (ander geval analoog).

Gebruik definitie van limiet met $\epsilon = \frac{1}{2} f(x_0)$:

$$\exists M > 0 \text{ waarvoor geldt dat } f(x) \leqslant |f(x)| \leqslant \frac{f(x_0)}{2} \quad \forall |x| > M.$$

Op het compacte interval $[-M, M]$ kunnen we nu de extremumstelling van Weierstrass toepassen:

$$\exists c \in [-M, M] \text{ waarvoor geldt dat } f(c) = \max_{[-M,M]} f.$$

Aangezien geldt voor alle $x \notin [-M, M]$ geldt dat

$$f(x) \leqslant \frac{f(x_0)}{2} < f(x_0) \leqslant f(c)$$

vinden we dat $f(c) = \max_{\mathbb{R}} f$.

Vraag 2

Vraag 2(a)

Beschouw een kromme in het vlak beschreven door de poolvergelijking $r = r(\theta)$. Leid de algemene formule af voor de oppervlakte van de figuur begrensd door de kromme $r = r(\theta)$ en de half-rechten $\theta = \theta_0$ en $\theta = \theta_1$ met $0 \leqslant \theta_0 < \theta_1 \leqslant 2\pi$. Maak een tekening.

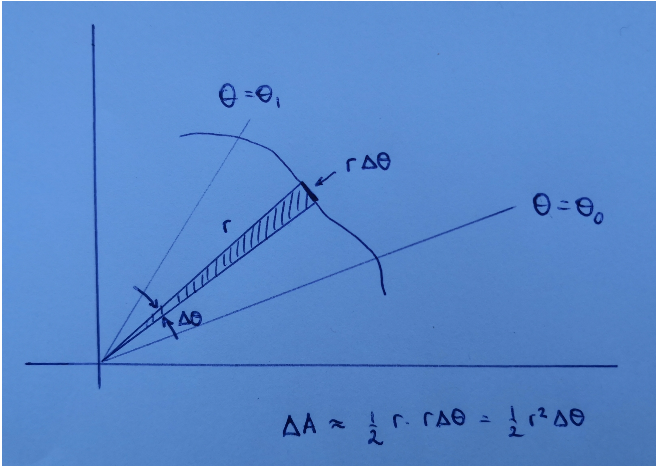
Deel het gebied op in kleine driehoekjes, elk met een kleine openingshoek $\Delta\theta$. Elk van deze driehoekjes heeft als oppervlakte

$$\Delta A \approx \frac{1}{2}\, r^2(\theta)\, \Delta\theta,$$

In de limiet $\Delta\theta \to 0$ krijgen we dan

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\theta} = \frac{1}{2}\, r^2(\theta) \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} r^2(\theta)\, \mathrm{d}\theta.$$

Vraag 2(a)



$\theta = \theta_1$
$r\Delta\theta$
$\theta = \theta_0$
r
$\Delta\theta$
$\Delta A \approx \frac{1}{2} r \cdot r\Delta\theta = \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta$

Vraag 2(b)

Gebruik deze algemene formule om de oppervlakte binnen een ellips met halve grote assen a en b te bepalen, gegeven door de poolvergelijking

$$r(\theta) = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta}}.$$

Wat krijg je in het geval $a = b$?

Gewoon $r(\theta)$ invullen in de formule. Grenzen: neem 4 maal de oppervlakte van het rechtsboven kwadrant van de ellips, dan gaan θ van 0 tot $\pi/2$,

$$A_{\text{ellips}} = 2a^2b^2 \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta}.$$

Vraag 2(b)

Deze integraal kan op verschillende manieren worden berekend.

Manier die expliciet in de cursus staat:

$$\begin{aligned} t = \tan\theta \quad &\Longrightarrow \quad \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta} \\ \theta = 0 \quad &\Longrightarrow \quad t = 0 \\ \theta = \frac{\pi}{2} \quad &\Longrightarrow \quad t = +\infty \end{aligned}$$

vinden we

$$A_{\text{ellips}} = 2b^2 \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(b/a)^2 + t^2} = 2b^2 \left[\frac{a}{b} \arctan \frac{at}{b}\right]_0^{+\infty} = \pi ab.$$

Voor een cirkel $a = b$, en dus $A_{\text{cirkel}} = \pi a^2$.

Vraag 2(c)

Een cardioïde is een wiskundige figuur gevormd door het pad van een punt op een cirkel, als deze cirkel rond een cirkel met dezelfde straal rolt (zie figuur). Bereken de oppervlakte binnen een cardioïde met straal a, gegeven door de poolvergelijking

$$r(\theta) = 2a\,(1 - \cos\theta).$$

Opnieuw gewoon $r(\theta)$ invullen in de formule. Grenzen: neem 2 maal de oppervlakte van de bovenste helft van de cardioïde, dus θ van 0 tot π,

$$\begin{aligned} A_{\text{card}} &= 4a^2 \int_0^\pi (1 - \cos\theta)^2 \mathrm{d}\theta \\ &= 4a^2 \left[\frac{3}{2}\,\theta - 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^\pi \\ &= 6\pi a^2 \end{aligned}$$

Vraag 2: Algemene opmerkingen

- Vergeet niet het belang van een goede figuur.
- Sommige studenten geven als oppervlakte onder de kromme:

$$A = \int_{\theta_0}^{\theta_1} r(\theta)\, \mathrm{d}\theta$$

  Dit kan niet kloppen wat dimensies betreft.
- Vergeet zeker niet om logisch na te denken. Het zou moeten geweten zijn dat een ellips met $a = b$ een cirkel is en dat de oppervlakte daarvan gelijk is aan πa^2.

Vraag 3

Vraag 3

Bepaal de oplossing van de volgende differentiaalvergelijking met gegeven beginvoorwaarden,

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = e^{2x} + 20\sin(2x) \quad \textbf{met} \quad \begin{cases} y(0) = 3\,, \\ y'(0) = -3\,. \end{cases}$$

Standaard inhomogene lineaire tweede-orde differentiaalvergelijking. Zeer vergelijkbare differentiaalvergelijkingen zijn opgelost in de oefeningenlessen.

Oplossingsmethode:

1. Bepaal de algemene oplossing van de complementaire vergelijking.
2. Bepaal een particuliere oplossing via de methode van de onbepaalde coëfficiënten.
3. Bepaal de vrije parameter aan de hand van de beginvoorwaarden.

Vraag 3

Stap 1: complementaire vergelijking:

$$y_c''(x) - 3y_c'(x) + 2y_c(x) = 0.$$

Karakteristieke vergelijking:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Oplossingen: $\lambda = 1$ en $\lambda = 2$.

Algemene oplossing van de complementaire vergelijking:

$$y_c(x) = c_1 \, \mathrm{e}^x + c_2 \, \mathrm{e}^{2x}$$

Vraag 3

Stap 2: particuliere oplossing via de methode van de onbepaalde coëfficiënten. Imhomogeniteit heeft de vorm

$$g(x) = \mathrm{e}^{2x} + 20\sin 2x,$$

dus we zouden normaal gezien als proeffunctie nemen

$$y_p(x) = a\,\mathrm{e}^{2x} + b\sin 2x + c\cos 2x.$$

Maar: e^{2x} komt al voor in de complementaire functie, dus we nemen

$$y_p(x) = a\,x\,\mathrm{e}^{2x} + b\sin 2x + c\cos 2x.$$

Vraag 3

Afleiden:

$$y_p(x) = a\,x\,\mathrm{e}^{2x} + b\sin 2x + c\cos 2x$$
$$y_p'(x) = 2a\,x\,\mathrm{e}^{2x} + a\,\mathrm{e}^{2x} + 2b\cos 2x - 2c\sin 2x$$
$$y_p''(x) = 4a\,x\,\mathrm{e}^{2x} + 4a\,\mathrm{e}^{2x} - 4b\sin 2x - 4c\cos 2x$$

Invullen in de differentiaalvergelijking om de coëfficiënten a, b en c te bepalen.

$$a\,\mathrm{e}^{2x} + (6c - 2b)\sin 2x - (6b + 2c)\cos 2x = \mathrm{e}^{2x} + 20\sin 2x$$

Oplossing: $a = 1$, $b = -1$ en $c = 3$, en dus

$$y_p(x) = x\,\mathrm{e}^{2x} - \sin 2x + 3\cos 2x.$$

Nuttige tussenstap: check of dit inderdaad een oplossing is!

Vraag 3

Stap 3: bepaling van de coëfficiënten c_1 en c_2. We hebben

$$y(x) = c_1\,\mathrm{e}^{x} + c_2\,\mathrm{e}^{2x} + x\,\mathrm{e}^{2x} - \sin 2x + 3\cos 2x,$$
$$y'(x) = c_1\,\mathrm{e}^{x} + 2c_2\,\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{2x} + 2x\,\mathrm{e}^{2x} - 2\cos 2x - 6\sin 2x.$$

Beginvoorwaarden:

$$y(0) = c_1 + c_2 + 3 = 3,$$
$$y'(0) = c_1 + 2c_2 - 1 = -3.$$

Oplossing: $c_1 = 2$ en $c_2 = -2$.

Uiteindelijke oplossing van deze differentiaalvergelijking

$$y(x) = 2\,\mathrm{e}^{x} - 2\,\mathrm{e}^{2x} + x\,\mathrm{e}^{2x} - \sin 2x + 3\cos 2x.$$

Nuttig: check of dit inderdaad de oplossing is!

Vraag 3: Algemene opmerkingen

- Lees de opgave goed, sommige studenten gebruiken de verkeerde beginvoorwaarden…
- Bepaling van de coëfficiënten c_1 en c_2 van de algemene oplossing via de randvoorwaarden op het einde, nadat je eerst de algemene oplossing $y(x) = y_c(x) + y_p(x)$ hebt bepaald.
- Veel gemaakte fout: verkeerde vorm van de testfunctie. Verkeerde opties zijn

$$y_p(x) = a\,\mathrm{e}^{2x} + b\sin 2x + c\cos 2x$$
$$y_p(x) = (a + b\,x)\,\mathrm{e}^{2x} + c\sin 2x + d\cos 2x$$
$$y_p(x) = a\,x\,\mathrm{e}^{2x} + b\sin 2x$$

- Differentiaalvergelijkingen lenen zich uitstekend voor controle: vul de oplossing in en je ziet onmiddellijk of het juist of fout is!

Vraag 4

Vraag 4(a)

Beschouw de vergelijking

$$\varepsilon \cos(y-1) + 1 - 2\varepsilon\, y = \mathbf{e}^{y-1},$$

waarbij we veronderstellen ε een kleine parameter is. Los bovenstaande vergelijking op naar y tot en met de orde ε^2 door gebruik te maken van de ansatz

$$y(\varepsilon) = y_0 + y_1\varepsilon + \frac{y_2}{2!}\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

Kan je onmiddellijk zien wat de waarde voor y_0 moet zijn? Leg uit, en gebruik dan deze y_0 in je ansatz.

Stap 1: $\varepsilon = 0$ invullen geeft $1 = \mathrm{e}^{y_0 - 1}$ zodanig dat $y_0 = 1$.

Vraag 4(a)

Stap 2: Expansie van de functies

Expansie van de cosinus:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4)$$

$$\cos(y-1) = \cos\left(y_1\varepsilon + \frac{1}{2}\,y_2\varepsilon^2\right) = 1 - \frac{1}{2}\,y_1^2\,\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

Expansie van de exponentiële functie

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)$$

$$\mathrm{e}^{y-1} = \mathrm{e}^{y_1\varepsilon + \frac{1}{2}\,y_2\varepsilon^2} = 1 + y_1\varepsilon + \left(\frac{y_2 + y_1^2}{2}\right)\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

Vraag 4(a)

Stap 3: Samenvoegen en oplossen

$$\varepsilon \cos(y-1) + 1 - 2\varepsilon\, y = \mathrm{e}^{y-1},$$
$$y = 1 + y_1\varepsilon + \frac{1}{2}\, y_2\varepsilon^2 + +\mathcal{O}(\varepsilon^3)$$
$$\cos(y-1) = 1 - \frac{1}{2}\, y_1^2\, \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$
$$\mathrm{e}^{y-1} = 1 + y_1\varepsilon + \left(\frac{y_2 + y_1^2}{2}\right)\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

Dit combineren tot op tweede orde in ε geeft

$$1 - \varepsilon - 2y_1\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) = 1 + y_1\varepsilon + \left(\frac{y_2 + y_1^2}{2}\right)\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

Vraag 4(a)

Vergelijken van de termen per orde in ε. We hadden

$$1 - \varepsilon - 2y_1\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) = 1 + y_1\varepsilon + \left(\frac{y_2 + y_1^2}{2}\right)\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

- Nulde orde valt weg, dus y_0 juist gekozen
- Eerste orde: $y_1 = -1$
- Tweede orde: $y_2 = 3$

Finale oplossing:

$$y = 1 - \varepsilon + \frac{3}{2}\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

Vraag 4(b)

De oplossing van bovenstaande vergelijking voor verschillende waarden van de parameter ε kan ook (quasi-)exact bepaald worden via numerieke of grafische methoden (zie figuur). Dit levert $y = 0.99014818$ voor $\varepsilon = 1/100$ en $y = 0.91331105$ voor $\varepsilon = 1/10$. Komen deze waarden overeen met hetgeen je vindt door respectievelijk $\varepsilon = 1/100$ en $\varepsilon = 1/10$ in te vullen bij in je antwoord bij (a)? Voor welke ε wijkt de waarde uit (a) het meeste af van het (quasi-)exacte resultaat? Verklaar waarom dit het geval is.

Voor $\varepsilon = 1/10$ hebben we $y = 0.915$.

Voor $\varepsilon = 1/100$ krijgen we $y = 0.99015$.

Vraag 4: Algemene opmerkingen

- Opgelet met opgave te lezen, veel mensen vergeten eerst y_0 te bepalen en verliezen daardoor punten, of komen vast te zitten
- Opgelet met verwaarlozen $(y-1)^n$, dit bevat in het algemeen termen met orde y^m voor $m < n$, dus dan is de oplossing niet $\mathcal{O}(y^{n+1})$, maar $\mathcal{O}((y-1)^{n+1})$.
- Probeer je tussenstappen beter te motiveren. Als je de Taylorexpansie van een cosinus gebruikt, schrijf die op, en pas dan toe, zorgt voor extra punten bij rekenfouten en is duidelijker.
- Bij opgaves die om uitleg vragen is het belangrijk om iets meer diepgang te geven dan "je kan gemakkelijk zien dat". Berust je op concretere argumenten.