Examen Wiskundige modellering : **open-boek-deel**

Vraag 1 (6 pt)

Een Van der Pol-oscillator met een constante externe kracht α voldoet aan de vergelijking:

$$\ddot{x} - \mu(1-x^2)\dot{x} + x = \alpha, \qquad \alpha, \mu \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

(a) Herschrijf het systeem in 1ste ordevorm en bepaal, in functie van de parameters α en μ, de evenwichtspunten, hun stabiliteit en wanneer ze hyperbolisch zijn.

(b) Bepaal de bifurcatiepunten $(\alpha^*, \mu^*, x_1^*, x_2^*)$ en schrijf neer, op basis van het aantal evenwichtspunten en de stabiliteitsanalyse, welke bifurcatietypes u denkt dat hier optreden.

(c) Ga grafisch na of deze bifurcatietypes effectief worden waargenomen en wat de eventuele aard ervan is. Geef als antwoord op deze deelvraag welke bifurcatietypes, en de eventuele aard ervan, effectief waargenomen worden samen met een korte motivering. Een tekening is niet nodig als antwoord.

Vraag 2 (6 pt)

We voegen aan de Van der Pol-vergelijking (1) een extra 2de orde differentiaalvergelijking toe:

$$\ddot{x} - \mu(1-x^2)\dot{x} + x = \alpha,$$
$$\ddot{y} + \mu(1-x^2)\dot{y} + y = 0.$$

Voor dit 4-dimensionaal systeem kan aangetoond worden dat het **Hamiltoniaans** is met $p_x = \dot{y} + \mu(1-x^2)y$ en $p_y = \dot{x}$ de toegevoegde momenten bij de coördinaten x en y.

(a) Geef de bewegingsvergelijkingen $\dot{p}_x = \ldots$; $\dot{p}_y = \ldots$; $\dot{x} = \ldots$; $\dot{y} = \ldots$.

(b) Bepaal de functie $z(x, y)$ zodat $H = p_x p_y - \mu(1-x^2)y p_y + z(x, y)$ de Hamiltoniaan is voor dit systeem.

(c) We maken voor dit systeem een expliciet numeriek integratie-algoritme als volgt:

1) pas op het systeem in $t = t_n$ één stap van staplengte h van de methode Symplectische Euler 1 (SE1) toe,

$$p_{n+1} = p_n + hf(p_{n+1}, q_n),$$
$$q_{n+1} = q_n + hg(p_{n+1}, q_n),$$

2) pas op het systeem in $t = t_n$ één stap van staplengte h van de methode Symplectische Euler 2 (SE2) toe,

$$p_{n+1} = p_n + hf(p_n, q_{n+1}),$$
$$q_{n+1} = q_n + hg(p_n, q_{n+1}),$$

3) gebruik nu de formules voor de componenten p_x en y bekomen via SE1 en de formules voor de componenten p_y en x bekomen met SE2.

Geef het numeriek integratie-algoritme van de methode die op deze manier bekomen wordt, schrijf de componenten in de volgorde waarin ze berekend dienen te worden.

(d) Bereken de waarde van de Hamiltoniaan na 300 stappen van de methode uit vraag (c) met staplengte $h = 0.01$, beginwaarden $p_x = 1, p_y = 1, x = 0, y = 0$ en parameters $\alpha = 1/2$, $\mu = -1$. Is de waarde van H constant gebleven? Zou dit moeten? Wat is de orde van de methode?