Examen Wiskundige modellering : **open-boek-deel**

Vraag 1 (6 pt)

Een Van der Pol-oscillator met een constante externe kracht α voldoet aan de vergelijking:

$$\ddot{x} - \mu(1-x^2)\dot{x} + x = \alpha, \qquad \alpha, \mu \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

(a) Herschrijf het systeem in 1ste ordevorm en bepaal, in functie van de parameters α en μ, de evenwichtspunten, hun stabiliteit en wanneer ze hyperbolisch zijn.

(b) Bepaal de bifurcatiepunten $(\alpha^*, \mu^*, x_1^*, x_2^*)$ en schrijf neer, op basis van het aantal evenwichtspunten en de stabiliteitsanalyse, welke bifurcatietypes u denkt dat hier optreden.

(c) Ga grafisch na of deze bifurcatietypes effectief worden waargenomen en wat de eventuele aard ervan is. Geef als antwoord op deze deelvraag welke bifurcatietypes, en de eventuele aard ervan, effectief waargenomen worden samen met een korte motivering. Een tekening is niet nodig als antwoord.

Vraag 2 (6 pt)

We voegen aan de Van der Pol-vergelijking (1) een extra 2de orde differentiaalvergelijking toe:

$$\ddot{x} - \mu(1-x^2)\dot{x} + x = \alpha,$$
$$\ddot{y} + \mu(1-x^2)\dot{y} + y = 0.$$

Voor dit 4-dimensionaal systeem kan aangetoond worden dat het **Hamiltoniaans** is met $p_x = \dot{y} + \mu(1-x^2)y$ en $p_y = \dot{x}$ de toegevoegde momenten bij de coördinaten x en y.

(a) Geef de bewegingsvergelijkingen $\dot{p}_x = \ldots;\ \dot{p}_y = \ldots;\ \dot{x} = \ldots;\ \dot{y} = \ldots.$

(b) Bepaal de functie $z(x,y)$ zodat $H = p_x p_y - \mu(1-x^2)yp_y + z(x,y)$ de Hamiltoniaan is voor dit systeem.

(c) We maken voor dit systeem een expliciet numeriek integratie-algoritme als volgt:

1) pas op het systeem in $t = t_n$ één stap van staplengte h van de methode Symplectische Euler 1 (SE1) toe,

$$p_{n+1} = p_n + hf(p_{n+1}, q_n),$$
$$q_{n+1} = q_n + hg(p_{n+1}, q_n),$$

2) pas op het systeem in $t = t_n$ één stap van staplengte h van de methode Symplectische Euler 2 (SE2) toe,

$$p_{n+1} = p_n + hf(p_n, q_{n+1}),$$
$$q_{n+1} = q_n + hg(p_n, q_{n+1}),$$

3) gebruik nu de formules voor de componenten p_x en y bekomen via SE1 en de formules voor de componenten p_y en x bekomen met SE2.

Geef het numeriek integratie-algoritme van de methode die op deze manier bekomen wordt, schrijf de componenten in de volgorde waarin ze berekend dienen te worden.

(d) Bereken de waarde van de Hamiltoniaan na 300 stappen van de methode uit vraag (c) met staplengte $h = 0.01$, beginwaarden $p_x = 1, p_y = 1, x = 0, y = 0$ en parameters $\alpha = 1/2$, $\mu = -1$. Is de waarde van H constant gebleven? Zou dit moeten? Wat is de orde van de methode?

Oplossing vraag 1

(a) We herschrijven het systeem in 1ste ordevorm door $x_1 = x$ en $x_2 = \dot{x}$ te stellen:

$$\dot{x_1} = x_2,$$
$$\dot{x_2} = \mu(1 - x_1^2)x_2^2 - x_1 + \alpha.$$

Er is slechts één evenwichtspunt: $x^* = (x_1^*, x_2^*) = (\alpha, 0)$. Voor de Jacobiaanse matrix in dit punt vinden we

$$Df(x^*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu(1-\alpha^2) \end{pmatrix}, \quad \tau = \mu(1-\alpha^2), \quad \Delta = 1 > 0.$$

We zien dat de determinant strikt positief is voor alle parameterwaarden. Het evenwichtspunt is stabiel voor α en μ zodat $\mu(1-\alpha^2) < 0$, en instabiel wanneer $\mu(1-\alpha^2) > 0$. Het (α, μ)-parametervlak wordt op deze manier in zes gebieden verdeeld door de drie rechten met vergelijkingen $\alpha = 1$; $\alpha = -1$; en $\mu = 0$. De zes gebieden worden weergegeven in Figuur 1, die verder ook de aard van het evenwichtspunt voor de lineaire benadering van het systeem toont. Enkel de stabiliteit is hier relevant.

De discriminant is $D = (\mu(1-\alpha^2))^2 - 4 = (\tau+2)(\tau-2)$. Merk op dat wanneer $D \geq 0$, dus als $\tau \notin]-2, 2[$, de eigenwaarden van de Jacobiaan reëel zijn en nooit 0 (door de gedaante van D). Als $D < 0$, is het reëel deel van de eigenwaarden precies $\tau = \mu(1-\alpha^2)$. Het evenwichtspunt is niet hyperbolisch wanneer $\mu(1-\alpha^2) = 0$, dus voor $\mu = 0$ of $\alpha \in \{1, -1\}$.

(b) Er is slechts één evenwichtspunt, dat overgaat van stabiel naar instabiel wanneer het reëel deel van de complex toegevoegde eigenwaarden nul wordt, dus is er een **Hopf-bifurcatie**. De bifurcatiepunten liggen in het parametervlak op de drie rechten: $\alpha = 1$; $\alpha = -1$; en $\mu = 0$. Geschreven als $(\alpha^*, \mu^*, x_1^*, x_2^*)$ hebben we:

$$\{(1, \mu, 1, 0) \mid \mu \in \mathbb{R}\}, \quad \{(-1, \mu, -1, 0) \mid \mu \in \mathbb{R}\}, \quad \{(\alpha, 0, \alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

(c) Met behulp van een tekening van de stroming en enkele numerieke fasebanen in MATLAB of Sage observeren we het volgende:

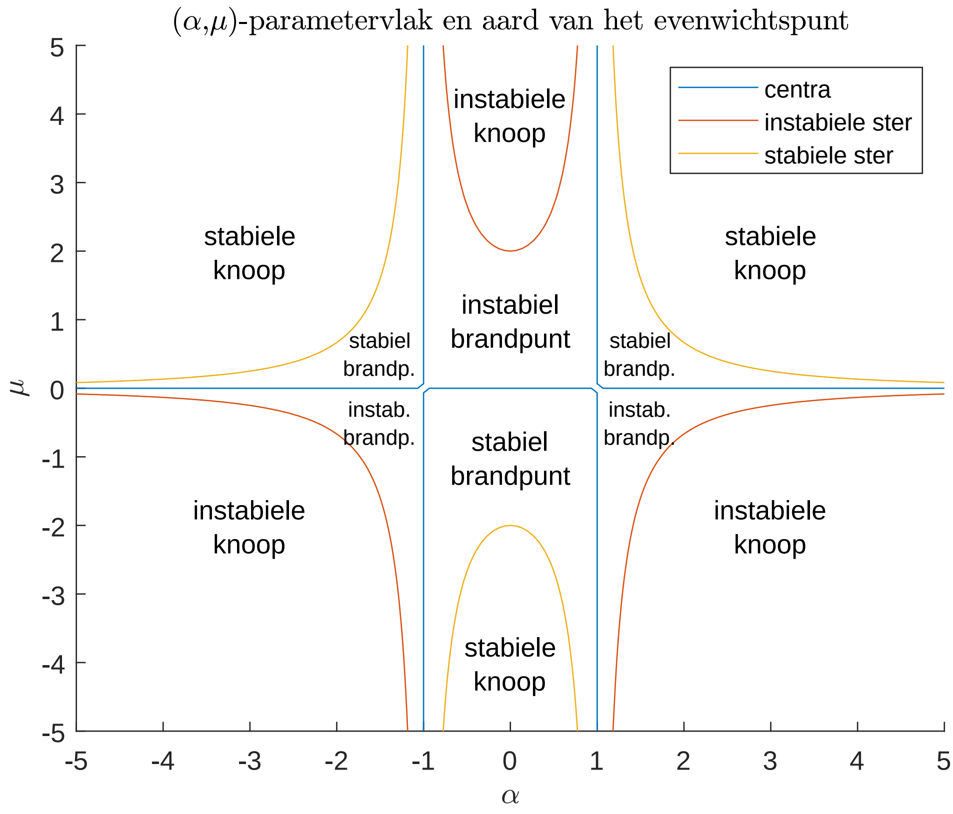
Bij $\mu > 0$, is er een stabiele periodieke oplossing of limietcyclus voor $\alpha \in]-1, 1[$, wanneer het evenwichtspunt instabiel is. Buiten het interval $\alpha \in]-1, 1[$ is het evenwichtspunt stabiel en is er geen limietcyclus. Dit is een **superkritische** Hopf-bifurcatie.

Bij $\mu < 0$, is er een instabiele periodieke oplossing voor $\alpha \in]-1, 1[$, wanneer het evenwichtspunt stabiel. Buiten het interval $\alpha \in]-1, 1[$ is het evenwichtspunt instabiel en is er geen limietcyclus. Dit is een **subkritische** Hopf-bifurcatie.

Voor $\mu = 0$ zijn er oneindig veel periodieke oplossingen (de oplossingen van de 2de orde differentiaalvergelijking zijn dan expliciet te schrijven als $x(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t) + \alpha$). Dit is een **ontaarde** Hopf-bifurcatie.

In MATLAB kan hiervoor rechtstreeks de code in `PCLab7b.m` voor oefening 4 gebruikt worden met volgende rechterlid (hier staat `a` voor α en `b` voor μ):

```
f1 = @(a,b,x1,x2) x2;
f2 = @(a,b,x1,x2) b*(1-x1.^2).*x2 - x1 + a;
```



Figuur 1: Aard van het evenwichtspunt $(\alpha, 0)$ van het gelineariseerde systeem in functie van de parameters α en μ.

Oplossing vraag 2

(a) Aan de hand van het stelsel 2de orde differentiaalvergelijkingen en de uitdrukkingen voor de toegevoegde momenten vinden we de bewegingsvergelijkingen

$$\begin{aligned}
\dot{p}_x &= -2\mu\, x\, y\, p_y - y, \\
\dot{p}_y &= \mu\,(1-x^2)\, p_y - x + \alpha, \\
\dot{x} &= p_y, \\
\dot{y} &= p_x - \mu\,(1-x^2)\, y.
\end{aligned}$$

(b) $H = p_x p_y - \mu(1-x^2) y p_y + xy - \alpha y$ is de Hamiltoniaan voor dit systeem.

(c) We vinden met respectievelijk de methodes SE1 en SE2:

$$\begin{aligned}
p_{x,n+1} &= p_{x,n} - h(2\mu\, x_n\, p_{y,n+1} + 1)\, y_n, & p_{x,n+1} &= p_{x,n} - h(2\mu\, x_{n+1}\, p_{y,n} + 1)\, y_{n+1}, \\
p_{y,n+1} &= p_{y,n} + h(\mu\,(1-x_n^2)\, p_{y,n+1} - x_n + \alpha), & p_{y,n+1} &= p_{y,n} + h(\mu\,(1-x_{n+1}^2)\, p_{y,n} - x_{n+1} + \alpha), \\
x_{n+1} &= x_n + h p_{y,n+1}, & x_{n+1} &= x_n + h p_{y,n}, \\
y_{n+1} &= y_n + h(p_{x,n+1} - \mu\,(1-x_n^2)\, y_n), & y_{n+1} &= y_n + h(p_{x,n} - \mu\,(1-x_{n+1}^2)\, y_{n+1}).
\end{aligned}$$

Op de manier zoals in de opgave beschreven, bekomen we dan de methode

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n + h p_{y,n}, \\
p_{y,n+1} &= p_{y,n} + h(\mu\,(1-x_{n+1}^2)\, p_{y,n} - x_{n+1} + \alpha), \\
p_{x,n+1} &= p_{x,n} - h(2\mu\, x_n\, p_{y,n+1} + 1)\, y_n, \\
y_{n+1} &= y_n + h(p_{x,n+1} - \mu\,(1-x_n^2)\, y_n).
\end{aligned}$$

(d) Voor de parameters $\alpha = 1/2$ en $\mu = -1$ is de waarde van de Hamiltoniaan in de beginwaarden precies 1. Met onderstaande MATLAB-code (aangepast van `numeriek_pq.m`) vinden we na 300 stappen van de methode uit vraag (c) met staplengte $h = 0.01$ de waarde 0.992343507780793.

De waarde van H is niet constant gebleven. Voor de exacte oplossing zou dit wel zo moeten zijn want de Hamiltoniaan is niet expliciet afhankelijk van de tijd. Voor een benadering met een numerieke methode verwachten we niet dat de exacte Hamiltoniaan bewaard blijft voor alle beginwaarden.

De orde van de methode is 1, want we zien dat na halvering van de staplengte h, ook de fout op de Hamiltoniaan halveert.

```
%% Vraag 2 (d)
H = @(a,mu,px,py,x,y) px.*py - mu*(1-x.^2).*y.*py + x.*y -a*y; % Hamiltoniaan
tspan = [0,3];
N = 300;
h = (tspan(2)-tspan(1))/N;
t = tspan(1):h:tspan(2);
a = 1/2;
mu = -1;
%%
% Geheugen alloceren voor p en q
px = zeros(N+1,1);
py = zeros(N+1,1);
x = zeros(N+1,1);
y = zeros(N+1,1);

% beginvoorwaarden
px(1,:) = 1;
py(1,:) = 1;
x(1,:) = 0;
y(1,:) = 0;

% rijen van p en q komen overeen met tijdstippen zoals output van ode45
for n = 1:N
    x(n+1,:) = x(n,:) + h*py(n,:);
    py(n+1,:) = py(n,:) + h*(a-x(n+1,:) + mu*(1-x(n+1,:).^2).*py(n,:));
    px(n+1,:) = px(n,:) + h*(-y(n,:).*(2*mu*x(n,:).*py(n+1,:)+1));
    y(n+1,:) = y(n,:) + h*(px(n+1,:) - mu*(1-x(n,:).^2).*y(n,:));
end
%%
format long
H(a,mu,px(1,:),py(1,:),x(1,:),y(1,:))
H(a,mu,px(N+1,:),py(N+1,:),x(N+1,:),y(N+1,:))
%%
plot(t,abs(1-H(a,mu,px,py,x,y))) % fout op H in de tijd
```