OEFEFNINGEN ALGEBRA - 21 FEBRUARI 1992

1 Zij A een commutatieve ring met eenheid. Zij $f \in A[X_1, \ldots, X_n]$, f bepaalt een (veelterm)functie

$$\begin{array}{rcl} f : A \times \ldots \times A & \to & A \\ (a_1, \ldots, a_n) & \mapsto & f(a_1, \ldots, a_n). \end{array}$$

Kan f de nulfunctie zijn als f niet het nulpolynoom is?
(Anders uitgedrukt: Bepaalt de functie f het polynoom f volledig?)

Hint: Neem $A = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(= \mathbb{F}_p)$. Bekijk polynomen in 1 veranderlijke.

2. Toon aan dat de volgende ringen isomorf zijn:

   1. Gegeven twee families $(X_i)_{i \in I}$ en $(Y_i)_{i \in I}$ veranderlijken, dan is

   $$A[(X_i)_{i \in I}] \cong A[(Y_i)_{i \in I}].$$

   2. $A[X_1, \ldots, X_n] \cong A[X_1, \ldots, X_{n-1}][X_n]$.

3. *Defnieer "graad" functies:*

$$\begin{array}{rrcl} \deg : & A[X_1, \ldots, X_n] & \to & \mathbb{Z} \\ \deg_{X_i} : & A[X_1, \ldots, X_n] & \to & \mathbb{Z}. \end{array}$$

Wat is de graad van het produkt van polynomen?
Toon aan dat als A een domein is, $A[X_1, \ldots, X_n]$ ook een domein is.

4. Zij $S = \{f_i(X_1, \ldots, X_n) = 0\}_{i \in \mathcal{F}}$ een stelsel vergelijkingen over de complexe getallen, i.e. $f_i(X_1, \ldots, X_n) \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$. Zij I het ideaal voortgebracht door de polynomen f_i. Stel $\mathcal{V}(I) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n | (a_1, \ldots, a_n)$ een nulpunt van het stelsel $S\}$.
Wordt I volledig bepaald door $\mathcal{V}(I)$?
(Anders uitgedrukt: Is de verzameling van de polynomen die nul worden in alle elementen van $\mathcal{V}(I)$ het ideaal I?)

OEFENINGEN ALGEBRA - 6 MAART 1992

1 Zij K een veld, $K[X,Y]$ de veeltermring in twee veranderlijken over K. Beschouw het ideaal voortgebracht door X en Y, $I = (X,Y)$. Toon aan dat I^n/I^{n+1} en A/I^n eindig dimensionale K-vectorruimten zijn. Bepaal de dimensies.

2. Zij A een ring, $A[X_1,\ldots,X_n]$ de veeltermring over A. Als $a_1,\ldots,a_n$ willekeurige eenheden zijn in A en $b_1,\ldots,b_n$ willekeurige elementen in A dan geldt

$$A[X_1,\ldots,X_n] = A[a_1X_1 + b_1,\ldots,a_nX_n + b_n].$$

3. Zij K een veld, $y_1,\ldots,y_n \in K$. Toon aan dat:
i) Voor alle $x_1,\ldots,x_n \in K$ bestaat er een unieke veelterm $P(X) \in K[X]$ met $\deg P(X) \leq n-1$ zodat

$$\forall x_i;\quad P(x_i) = y_i.$$

ii)Deze veelterm $P(X)$ is van de vorm

$$u_0 + u_1(X - x_1) + \ldots + u_{n-1}(X - x_1)\cdots(X - x_{n-1})$$

met $u_i \in K$.

4. Zij K een veld en $A = K[X,Y,Z]$. Beschouw het ideaal $I = (X^2 - Y^3, Y^2 - Z^3)$. Toon aan dat
i) Als $B = A/I$ elk element $\alpha \in B$ de klasse is van een veelterm $F(X,Y,Z)$ met $\deg_X F \leq 1$ en $\deg_Y F \leq 1$.
ii) Definieer het ringhomomorfisme φ door

$$\begin{array}{rcccl}
\varphi : & K[X,Y,Z] & \longrightarrow & K[T] & \\
& \lambda & \longmapsto & \lambda & \quad \text{als } \lambda \in K \\
& X & \longmapsto & T^9 & \\
& Y & \longmapsto & T^6 & \\
& Z & \longmapsto & T^4 &
\end{array}$$

Bepaal $\ker\varphi$. Toon aan dat I een priemideaal is.
iii) Zij $L = Q(B)$ het breukenveld van B dan geldt

$$L \cong K(T).$$

5. Zij A een domein. Een *kleinste gemeen veelvoud* van $a, b \in A$, $kgv(a, b)$ is een element k zodat $a|k$ en $b|k$ en als $l \in A$ met $a|l$ en $b|l$ dan volgt $k|l$.
a) Toon aan dat twee elementen een kgv in A bezitten als en slechts als $(a) \cap (b)$ een hoofdideaal is.
b) Stel a, b zijn irreducibel, $(a) \neq (b)$ en a, b hebben een kgv dan is $(a) \cap (b) = (ab)$.
c) Toon aan dat A een UFD is als en slechts als voor alle $a \in A \setminus \{0\}$ en $a \notin U(A)$, a het produkt is van irreducibele elementen en elk koppel $a, b \in A$ een kgv in A heeft.
d) Toon aan dat een UFD waarin elk eindig voortgebracht ideaal een hoofdideaal is noodzakelijk een PID is.

OEFENINGEN ALGEBRA - 27 APRIL 1992

1 Zij A een commutatief domein. Als a een eenheid is in A bestaat er een uniek automorfisme

$$\sigma : A[X] \to A[X]$$

zodat $\sigma_{|}A = id$ en $\sigma(X) = aX + b$.
Bepaal σ^{-1}.

2. a) Zij $F_p(t)$ het breuken veld van $F_p[t]$. Zij $f(t), g(t) \in F_p[t]$ met $\deg f(t) > 1$, $g(t) \neq 0$, $\deg f(t) \geq \deg g(t)$ en $f(t)$ en $g(t)$ relatief priem.
Toon aan dat $F_p(t)$ een algebraïsche uitbreiding is van $F_p(\frac{f(t)}{g(t)})$.
Toon aan dat het minimaal polynoom, $p_t(X)$ van t over $F_p(\frac{f(t)}{g(t)})$ gelijk is aan

$$p_t(X) = f(X) - \frac{f(t)}{g(t)} g(X) \in F_p(\frac{f(t)}{g(t)})[X].$$

Hint: *Stel* $\frac{f(t)}{g(t)} = Y$, *Y is transcendent over F_p. Bewijs dat $p_t(X)(= p_t(Y, X))$ als polynoom in $F_p[Y, X] \cong F_p[Y][X] \cong F_p[X][Y]$ irreduciebel is. Merk op dat $p_t(Y, X)$ irreduciebel is in $F_p(X)[Y]$.*

b) Geef voorbeelden van $\alpha = \frac{f(X)}{g(X)} \in F_p(t)$ zodat $F_p(t)/F_p(\alpha)$ een inseparabele uitbreiding is en zodat $F_p(t)/F_p(\alpha)$ een separabele uitbreiding is.

3. Toon aan dat voor alle $n \in N$, $n > 1$, er een polynoom $f(X)$ bestaat over F_p met $\deg f(X) = n$ en $f(X)$ irreduciebel.

4. Welke velden treden op als quotienten (i.e. als homomorfe beelden) van de ring $F_p[X]$?

5. Zij K een veld, L/K een Galois uitbreiding met Galois groep G. Beschouw een stelsel vergelijkingen over K

$$f_i(X_1, \ldots, X_n) = 0, \quad i \in \{1, \ldots, m\}.$$

Zij $I = < f_1, \ldots, f_m >$ het ideaal in $K[X_1, \ldots, X_n]$ voortgebracht door de f_i's. Definieer

$$V(I) = \{g : K[X_1, \ldots, X_n] \to L \mid \; g \text{ een } K\text{-algebra homomorfisme met } I \subset \ker g\}.$$

Interpreteer $V(I)$ als de verzameling van oplossingen (nulpunten) van het stelsel $\{f_i\}$ in L.
Toon aan dat de Galois groep G op een natuurlijke manier werkt op $V(I)$, i.e. elke $\sigma \in G$ bepaalt een afbeelding (ook σ genoemd)

$$\sigma : V(I) \to V(I).$$

Is deze σ injectief, surjectief?

Interpreteer σ ook als afbeeling op de nulpunten!
Wat zijn de fixpunten van de actie van σ op $V(I)$, (i.e. bepaal $V(I)^G$)?

5. Zij k een willekeurig veld, $n \in N, n > 1$ en $(n, char(k)) = 1$.
Toon aan dat het splijtveld van het polynoom $X^n - 1$ een abelse uitbreiding is van k.
Wat weet je van de graad van deze uitbreiding?

6. Toon aan dat $F_{p^n} \subset F_{p^m}$ dan en slechts dan als $n|m$.

Examen Algebra
2de Kandidatuur Wiskunde optie Wiskunde
Juni 1992

Een hoofdstuk dat een ieder, die geen al te hoge dunk heeft van het denken als bezigheid, kan overslaan.

Robert MUSIL, *Der Mann ohne Eigenschaften.*

Kies 3 vragen waarvan minstens 1 uit deel II.

Deel I.

1. Zij A een domein. Een *kleinste gemeen veelvoud* van $a, b \in A$, $kgv(a, b)$ is een element k zodat $a|k$ en $b|k$ en als $l \in A$ met $a|l$ en $b|l$ dan volgt $k|l$.
a)Stel a, b zijn irreduciebel, $(a) \neq (b)$ en a, b hebben een kgv dan is $(a) \cap (b) = (ab)$.
b)Toon aan dat A een UFD is als en slechts als voor alle $a \in A \setminus \{0\}$ en $a \notin U(A)$, a het produkt is van irreduciebele elementen en elk koppel $a, b \in A$ een kgv in A heeft.
c) Toon aan dat een UFD waarin elk eindig voortgebracht ideaal een hoofdideaal is noodzakelijk een HID is.

2 Zij $\mathbb{F}_p(t)$ het breuken veld van $\mathbb{F}_p[t]$. Zij $f(t), g(t) \in \mathbb{F}_p[t]$ met $\deg f(t) > 1$, $g(t) \neq 0$, $\deg f(t) \geq \deg g(t)$ en $f(t)$ en $g(t)$ relatief priem.
a) Toon aan dat $\mathbb{F}_p(t)$ een algebraïsche uitbreiding is van $\mathbb{F}_p(\frac{f(t)}{g(t)})$.
b) Toon aan dat het minimaal polynoom, $p_t(X)$ van t over $\mathbb{F}_p(\frac{f(t)}{g(t)})$ gelijk is aan

$$p_t(X) = f(X) - \frac{f(t)}{g(t)} g(X) \in \mathbb{F}_p(\frac{f(t)}{g(t)})[X].$$

3 Zij p een oneven priemgetal, ζ een primitieve p-de eenheidswortel en $K = \mathbb{Q}(\zeta)$ het p-de cyclotomische veld.
a) Beschrijf de deelvelden van K.
b) Geef alle deelvelden van $\mathbb{Q}(\zeta)$ met ζ een 11-de primitieve eenheidswortel.

4. Zij $A = \mathbb{Q}[X, Y, Z]/(X^3 + 2)$. Toon aan dat A een uniek factorisatie domein is.
(Hint: Bijvoorbeeld door aan te tonen dat A isomorf is met een uniek factorisatie domein.)

Alg 3

<u>Deel II</u>

bekend

5. Zij K een veld en I een ideaal in $A = K[X_1, \ldots, X_n]$. Beschouw de verzameling van de nulpunten van I

$$\mathcal{V}(I) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in K^n | f(a_1, \ldots, a_n) = 0 \text{ voor alle } f \in I\}.$$

Toon aan dat
a) I en J idealen in A dan geldt $\mathcal{V}(IJ) = \mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J)$.
b) Als $\{I_n\}_n$ een familie idealen is in A, dan is $\mathcal{V}(\sum_n I_n) = \bigcap \mathcal{V}(I_n)$.
~~c)~~ $\mathcal{V}(I) \subset \mathcal{V}(J)$ als en slechts als $rad(J) \subset rad(I)$. eigenschap.
(Het radicaal van I is per definite $rad(I) = \{x \in A | \exists n \in \mathbb{N} \text{ zodat } x^n \in I\}$.)
d) Er is een bijectie tussen de verzameling $\mathcal{V}(I)$ en de verzameling van K-homomorfismen $Hom_K(A/I, K)$

6. Zij $K = \mathbb{Q}(\sqrt{a})$ met $a \in \mathbb{Z}$, $a < 0$. Toon aan dat er geen inbedding van K in een cyclische uitbreiding over $\mathbb{Q}$ van graad 4 bestaat. (in minste geval deelbaar door 4!)

7. Zij $\mathbb{Q}^a$ de algebraïsche sluiting van $\mathbb{Q}$. Zij E een maximaal deelveld van $\mathbb{Q}^a$ dat <u>niet</u> $\sqrt{2}$ bevat (bestaat zulk een veld?). Toon aan dat elke eindige uitbreiding van E een cyclische uitbreiding is. argument vinden

8. Zij E een algebraïsche uitbreiding van een veld K, van karakteristiek 0, waarin elke veelterm $f \in K[X]$ met de graad $\deg f \geq 1$, minstens 1 wortel heeft. Toon aan dat E algebraïsch gesloten is. niet alle wortels in 1 keer

Alg 4