Numerieke Analyse 1992–1993. Eerste examenperiode.

THEORIE

1. Bij het opstellen van meervoudige stap methoden kan men een beroep doen ofwel op interpolatieformules, ofwel op kwadratuurformules. In welke gevallen zal men geneigd zijn om kwadratuurformules te gebruiken?
2. Propositie 1.1 : leg uit waarom $\|A\|_1 \leq K$.
3. Leg het bewijs van Stelling 6.5 over de wortels van orthogonale veeltermen uit.
4. Leg de inverse machtmethode voor eigenwaardeberekeningen uit.

OEFENINGEN

1. Beschouw de volgende kwadratuurformule :

$$\int_0^1 f(x)dx \approx Af(0) + Bf(\alpha) + Cf'(1), \qquad (\alpha \in \mathbb{R}, 0 < \alpha < 1).$$

   Bepaal A, B en C (in termen van α) zodat de GVAN zo hoog mogelijk wordt. Wat is de GVAN? Kan door een speciale keuze van α de GVAN groter of kleiner worden?

2. Zij $f(x)$ een monisch veelterm van graad 5. Zij $p(x)$ de interpolatieveelterm door de punten $(i, f(i))$, $i = 0,1,2,3,4$, en zij $q(x)$ de interpolatieveelterm door de punten $(i, p(i))$, $i = 0,1,2,3$. Als je weet dat $q(x) = x^3$ en $f(-1) = -24$, bepaal dan de expliciete gedaante van $f(x)$.

3. Zij $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch en positief definiet. Toon aan dat

$$|a_{ij}| < \frac{1}{2}(a_{ii} + a_{jj}) \qquad \text{voor } i \neq j.$$

N4

Numerieke Analyse 1992–1993. Eerste examenperiode. e. ing. 5

THEORIE

1. Voer een vergelijkende bespreking van de Jacobi en Householder methode bij de bepaling van eigenwaarden van een matrix A.
2. Stelling 3.2 : verklaar waarom $\lim_{k\to\infty} J_\mu^k = 0$.
3. Leg het bewijs van Stelling 2.1 (LU-factorisatie) uit.
4. Bij norm minimalisatie (paragraaf 7.4.4) tracht men $\|\Psi\|_q$ zo klein mogelijk te maken. Leg het geval $q = 2$ uit.

OEFENINGEN

1. Zij gegeven de differentiaalvergelijking $y' = f(t)$ (m.a.w. f is onafhankelijk van y). Stel hiervoor een 4^e orde Runge-Kutta formule op met

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t), \\ k_2 &= hf(t+\frac{h}{3}), \\ k_3 &= hf(t+\frac{2h}{3}), \\ k_4 &= hf(t+h), \end{aligned}$$

m.a.w. bepaal A_1, A_2, A_3 en A_4 zodat $\Delta y \approx \sum_{i=1}^4 A_i k_i$ correct is tot en met orde h^4. Kan je een verband leggen met kwadratuurformules?

2. Zij

$$f(t) = (t^3 + 7t^2 + 83t + 9)/100, \qquad t \in [0,2].$$

Bepaal door middel van Chebyshev foutenreductie een lineaire benadering van $f(t)$ in het interval $[0,2]$ (m.a.w. gebruik foutenreductie om $f(t)$ tot een polynoom $p_1(t)$ van graad 1 te herleiden). Wat is de maximale afwijking tussen $f(t)$ en $p_1(t)$ in $[0,2]$?

3. Zij $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Toon aan dat

$$\|A\|_2^2 \le \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2.$$

NA 1

Numerieke Analyse 1992–1993. Eerste examenperiode. 9 [illegible]

THEORIE

1. Wat is het principe van veelterminterpolatie? Waar wordt interpolatie gebruikt? Wat is het nut van numerieke afgeleiden?
2. Propositie 1.2 : leg uit waarom $\|A\|_\infty \le \max_i \left(\sum_j |a_{ij}|\right)$.
3. Bij meervoudige stap methoden (paragraaf 8.3) vertrekt men dikwijls van (8.31), en past men (8.32) toe. Leg uit.
4. p23 Stelling 2.2 : toon aan dat de decompositie $A = GG^T$ uniek is.

OEFENINGEN

1. Beschouw de volgende kwadratuurformule :

$$\int_0^1 f(x)dx \approx Af(0) + Bf'(\alpha) + Cf''(1/2), \qquad (\alpha \in \mathbb{R}, 0 \le \alpha \le 1).$$

Bepaal A, B en C (in termen van α) zodat de GVAN zo hoog mogelijk wordt. Wat is de GVAN? Kan door een speciale keuze van α de GVAN groter of kleiner worden?

2. Gegeven is de functie

$$f(t) = 1 + \frac{t}{8} + \left(\frac{t}{8}\right)^2 + \left(\frac{t}{8}\right)^3, \qquad \text{met} \qquad t \in [-2, +2].$$

Bepaal d.m.v. Chebyshev foutenreductie een veelterm $p(t)$ met een zo laag mogelijke graad zodanig dat

$$M = \max_{t \in [-2,+2]} |f(t) - p(t)| < 2^{-4}.$$

Wat is M in het binair stelsel?

3. Zij $A = I - 2hh^T$ met $h^Th = 1$, waarbij $h \in \mathbb{R}^n$ en I de $n \times n$ eenheidsmatrix voorstelt. Bepaal de eigenwaarden λ van A uit de vergelijking $Ax = \lambda x$ ($x \neq 0$), en geef de geometrische en algebraïsche multipliciteit van de eigenwaarden.

NA2