

OEFENINGEN

1. Gegeven is de volgende matrix :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}, \quad (a \in \mathbb{R}).$$

- a) Pas het algoritme  $LU$ -factorisatie toe op  $A$ . Geef  $L$  en  $U$  expliciet. Voor welke  $a$ -waarden bestaat er geen  $LU$ -factorisatie? Zijn er  $a$ -waarden waarvoor de  $LU$ -decompositie niet uniek is, en zo ja, geef een voorbeeld.
- b) Bepaal de Cholesky decompositie  $GG^T$  van  $A$ ; leid hieruit af voor welke  $a$ -waarden  $A$  positief definit is.

2. Gegeven is de volgende matrix :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 \\ -a & 1 & -a \\ a^2 & -a & 1 \end{pmatrix}, \quad (a \in \mathbb{R}).$$

- a) Stel de iteratiematrix  $C$  op voor de iteratieve oplossing van een stelsel  $Ax = b$  d.m.v. de Gauss-Jacobi methode. Geef een *nodig en voldoende voorwaarde* (in termen van  $a$ ) opdat het iteratieproces zou convergeren voor een willekeurige startwaarde  $x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$ .
  - b) Stel de iteratiematrix  $C$  op voor de iteratieve oplossing van een stelsel  $Ax = b$  d.m.v. de Gauss-Seidel methode. Geef een *nodig en voldoende voorwaarde* (in termen van  $a$ ) opdat het iteratieproces zou convergeren voor een willekeurige startwaarde  $x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$ .
3. Gegeven is de functie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , met  $f(x) = |x|$ . Stel door  $p(x)$  de interpolatieveelterm door de punten  $(i, f(i))$  ( $i = -2, -1, 0, 1, 2$ ) voor, en stel door  $q(x)$  de interpolatieveelterm door de punten  $(j, p(j))$  ( $j = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}$ ) voor. Bepaal  $q(0)$ .

4. Beschouw de volgende kwadratuurformule :

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx Af(-1) + Bf(1) + Cf'(1).$$

- a) Bepaal  $A, B$  en  $C$  zodat de GVAN zo hoog mogelijk wordt. Wat is de GVAN?
- b) Bereken de Peano kern  $K(t)$  voor de aldus bekomen kwadratuurformule.
- c) Indien  $K(t)$  een vast teken heeft in  $[-1, 1]$ , stel dan een expliciete uitdrukking op voor de procesfout van de kwadratuurformule.