1ste zittijd 1993-94
2de kand. wiskunde
Projectieve Meetkunde

---

1. Beschouw een projectief vlak $\mathcal{P}$ dat gecoördinatiseerd werd aan de hand van een verzameling $R$. Is $T(a,b,c)=k$, met $a,b,c \in R$, als en slechts als het punt $(b,c)$ op de rechte $[a,k]$ ligt, dan gelden volgende eigenschappen: 5 eig^n PTR

2. Een bijectie $\alpha$ van de puntenverzameling van $PG(V)$ op de puntenverzameling van $PG(W)$, met $\mathrm{rnd}(V) = \mathrm{rnd}(W)$, induceert een collineatie als en slechts als elke drie collineaire punten van $PG(V)$ door $\alpha$ afgebeeld worden op drie collineaire punten van $PG(W)$.

3. Orthogonale en hermitische polariteiten wanneer $K$ eindig is.

Cinar theorie i pol-

TK, C en eindig gr.:

Li vr orth en herm. pol-

TWEEDE KANDIDATUUR WISKUNDE

VRIJDAG 24 JUNI 1994

GROEP 1 — NAMIDDAG, 16.30 – 19.00

EERSTE ZITTIJD

**Examen Oefeningen Projectieve Meetkunde**

Vraag 1. Gegeven in $PG(2,q)$ is een verzameling $V$ van $q+2$ punten met de eigenschap dat geen enkele rechte van $PG(2,q)$ drie of meer punten met $V$ gemeen heeft. Bewijs dan dat $q$ even moet zijn, dat geen enkele rechte juist één punt met $V$ gemeen heeft en geef voor elk zulke $q$ een voorbeeld van zo een verzameling $V$. HINT: Bewijs eerst dat geen enkele rechte $V$ snijdt in juist één punt.

Vraag 2. Hoeveel irreduciebele kegelsneden zijn er in $PG(2,q)$, $q$ oneven, waarvoor de geassocieerde polariteit eenzelfde koppel $(p, L)$ bevat, met $p$ een punt niet op de rechte $L$ gelegen? Hoeveel daarvan gaan door eenzelfde punt en hoeveel daarvan hebben bovendien dezelfde raaklijn door dat punt? Bewijs dat die aantallen niet afhankelijk zijn van $(p, L)$, maar wel van het gekozen punt!

[illegible]

[illegible]

SCHRIJF ELKE OEFENING OP EEN AFZONDERLIJK DUBBEL BLAD. VERGEET JE NAAM NIET TE VERMELDEN OP ELK BLAD!

TWEEDE KANDIDATUUR WISKUNDE — VRIJDAG 24 JUNI 1994

GROEP 2 — NAMIDDAG, 14.00 – 16.30 — EERSTE ZITTIJD

## Examen Oefeningen Projectieve Meetkunde

Vraag 1. Een "*blokkende verzameling*" (afgekort BV) $B$ in een projectief vlak is een verzameling die met elke rechte van dat vlak minstens één punt gemeen heeft. Bewijs dat een BV in $PG(2,q)$ steeds minstens $q+1$ heeft. Beschouw de volgende verzameling $V$ in $PG(2,q)$ met $q$ oneven: punten

$$V = \{(0,1,-a) \parallel a \in \square\} \cup \{(-a,0,1) \parallel a \in \square\} \cup \{(1,-a,0) \parallel a \in \square\},$$

waarbij $\square$ de verzameling van alle kwadraten van $GF(q)$ voorstelt. Hoeveel punten bevat $V$? Bewijs dat $V$ een BV is. Bewijs ook dat $V \setminus \{x\}$ geen BV is, voor elke $x \in V$.

Vraag 2.

Deel A. Een *vierhoek* in een projectief vlak $PG(2,q)$ is een verzameling van vier punten waarvan geen drie collinear zijn. De zes verbindingsrechten worden de *zijden* genoemd. De snijpunten van de zijden die geen punt van de vierhoek zijn, worden *diagonaalpunten* genoemd. Bewijs dat er steeds juist drie diagonaalpunten zijn en dat deze collinear zijn als en slechts als $q$ even is. In dit geval spreken we van de *diagonaalrechte*. Bewijs dat dan de vier hoekpunten, de drie diagonaalpunten, de zes verbindingsrechten en de diagonaalrechte een projectief vlak vormen.

Deel B. Wat is de meetkundige plaats van de kern van de kegelsneden beschreven om een vierhoek in $PG(2,q)$ met $q$ even?

SCHRIJF ELKE OEFENING OP EEN AFZONDERLIJK DUBBEL BLAD. VERGEET JE NAAM NIET TE VERMELDEN OP ELK BLAD!

TWEEDE KANDIDATUUR WISKUNDE

VRIJDAG 24 JUNI 1994

GROEP 3— VOORMIDDAG, 8.30 - 11.00

EERSTE ZITTIJD

## Examen Oefeningen Projectieve Meetkunde

Vraag 1. Een *parallellogram* in een affien vlak is een verzameling van vier punten, per drie genomen niet collineair, waarbij de zes verbindingsrechten de rechte op oneindig in ten hoogste vier punten snijden. Bewijs dat in $AG(2,q)$ de verbindingslijnen van de vier punten van een parallellogram de rechte op oneindig snijden in juist vier punten als $q$ oneven is, en in juist drie punten als $q$ even is. Bewijs dat in $AG(2,q)$ de automorfisme groep transitief werkt op de verzameling van parallellogrammen. Bewijs dat de orde van de stabilizatorgroep van een willekeurig parallellogram in $AG(2,q)$ (in de volledige automorfisme groep van $AG(2,q)$) gelijk is aan $8h$, waarbij $q = p^h$ met $p$ een priemgetal, als $q$ oneven is, en $24h$ als $q$ even is.

Vraag 2. Hoeveel kegelsneden zijn er in $PG(2,q)$, $q$ even, die dezelfde kern hebben? Hoeveel van die kegelsneden gaan ook nog door eenzelfde punt en hoeveel hebben bovendien nog dezelfde raaklijn in dat punt? Bewijs dat de gevonden aantallen onafhankelijk zijn van het gekozen punt, de gekozen kern en de gekozen raaklijn!

SCHRIJF ELKE OEFENING OP EEN AFZONDERLIJK DUBBEL BLAD. VERGEET JE NAAM NIET TE VERMELDEN OP ELK BLAD!