Numerieke Analyse 1994–1995. Eerste examenperiode.

OEFENINGEN

1. Zij $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ een Hessenberg matrix, i.e. een matrix van de vorm

$$A = \begin{pmatrix} * & * & * & \cdots & * \\ * & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * & * \end{pmatrix},$$

of nog : $a_{ij} = 0$ voor $i - j \geq 2$. Neem aan dat A een rechtstreekse LU-factorisatie bezit (m.a.w. dat de pivotelementen nooit nul worden).

a) Herschrijf het **Algoritme** *LU-factorisatie* voor zulke matrices. Welke speciale vorm heeft L? Hoeveel elementaire rekenkundige bewerkingen vereist deze factorisatie?

b) Herschrijf het **Algoritme** *Oplossing_van_LUx* $= b$, rekening houdend met de specifieke vorm van L en U voor de gegeven A. Bepaal opnieuw het aantal elementaire rekenkundige bewerkingen.

2. Gegeven is de volgende matrix :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 2/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Stel de iteratiematrix C_ω (geassocieerd met $Ax = b$) uit de SOR-methode expliciet op.

b) Neem aan dat $0 < \omega \leq 1$. Bepaal $\|C_\omega\|_1$, in functie van ω.

c) Voor welke ω $(0 < \omega \leq 1)$ is de SOR-methode convergent (werkende met de 1-norm) voor elke startwaarde? Is er een optimale ω-waarde waarvoor de convergentie in de 1-norm het snelst verloopt?

3. Bepaal de monische vijfdegraadsveelterm(en) $p(x)$ waarvoor

$$M = \max_{x\in[0,1]} |p'(x)| \qquad (p'(x) = \frac{dp}{dx})$$

minimaal is. Wat is de waarde van M?

4. Beschouw de volgende kwadratuurformule :

$$\int_0^2 f(x)dx \approx Af(0) + Bf'(1) + Cf''(2).$$

a) Bepaal A, B en C zodat de GVAN zo hoog mogelijk wordt. Wat is de GVAN?

b) Bereken de Peano kern $K(t)$ voor de aldus bekomen kwadratuurformule.

c) Indien $K(t)$ een vast teken heeft in $[0,2]$, stel dan een expliciete uitdrukking op voor de procesfout van de kwadratuurformule.