1ste kandidatuur Informatica – groep 8

Examen Diskrete Wiskunde – Theorie

Academiejaar 1995-96 – 1ste examenperiode

1. Geef de definitie van de Stirling getallen $S(n,k)$ van de tweede soort. Bewijs dat deze getallen recursief kunnen gedefinieerd worden door $S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)$, $(2 \leq k \leq n-1)$, $S(n,1) = S(n,n) = 1$.

2. Geef de definitie van inverteerbaar element in $\mathbb{Z}_m$ en bewijs de nodige en voldoende voorwaarde opdat een element in $\mathbb{Z}_m$ inverteerbaar zou zijn.

3. Formuleer en bewijs de stelling van Lagrange voor de orde van een deelgroep van een eindige groep.

4. Bewijs dat voor een willekeurig eindig veld $\mathbf{F}_q$ de additieve groep een elementair abelse groep is en dat de multiplikatieve groep een cyclische groep is.

5. Leg het algoritme van Kruskal uit voor het verbindingenprobleem in een gewogen graaf en bewijs de korrektheid van dit algoritme. Bespreek eveneens de cykeltest en het algoritme van Prim.

1ste kandidatuur Informatika

Examen Diskrete Wiskunde – Oefeningen

Academiejaar 1995-96 – 1ste examenperiode

1. Bij het pokerspel krijgt iedere speler bij de aanvang van het spel vijf kaarten. Er wordt gespeeld met 52 kaarten.
(a) Hoeveel mogelijke vijftallen kaarten kan een speler toebedeeld krijgen?
(b) Op hoeveel manieren kan een speler elk van de volgende combinaties toebedeeld krijgen bij de aanvang van het spel:
(b.1) *four of a kind*: vier van eenzelfde soort + een vijfde kaart. (vb: vier azen + een drie);
(b.2) *full house*: drie van eenzelfde soort + twee van eenzelfde soort. (vb: drie achten en twee zessen);
(b.3) *three of a kind*: drie van eenzelfde soort + een vierde kaart van een andere soort + een vijfde kaart van nog een andere soort. (vb: drie azen + één tien + één vijf);
(b.4) *two pair*: twee van eenzelfde soort + twee van een andere soort + één van nog een andere soort. (vb: twee zessen + twee achten + één negen);
(b.5) *one pair*: van de vijf kaarten zijn er slechts twee van dezelfde soort. (vb: twee negens + één aas + één vijf + één twee).

2. Een bedrijf dat steekproeven organiseert bezit een databank met gegevens van v personen. Deze v personen zijn gegroepeerd in groepjes van k ($k < v$) zodat t personen in precies λ groepjes zitten ($t < k$).
Bewijs dat t' personen, met $t' < t$, tot precies

$$\lambda \binom{v-t'}{t-t'} / \binom{k-t'}{t-t'}$$

groepjes behoren.

3. In een programmeertaal worden enkel correcte wiskundige uitdrukkingen (zonder haakjes) aanvaard die gevormd worden met de cijfers $1, \ldots, 9$, en de binaire bewerkingssymbolen $+, *, /, -$ (Bijvoorbeeld: $1221, 3+4, 2+3*5, 23*59+1124$ zijn correcte wiskundige uitdrukkingen, maar $+2, 8+*9, 9+3-$ zijn dit niet).
Zij a_n het aantal correcte wiskundige uitdrukkingen van lengte n.
(1) Bewijs dat a_n voldoet aan de recurrente betrekking:

$$a_n = 9a_{n-1} + 36a_{n-2}, \qquad n \geq 3, \qquad a_1 = 9, a_2 = 81;$$

(2) Los deze recurrente betrekking op;
(3) Geef de voortbrengende funktie voor a_n.

4. Los op: $X^4 \equiv 1 \pmod{143}$.

5. Veronderstel dat u en v twee elementen zijn van een abelse groep $(G, .)$ met respectievelijke ordes r en s. Onderstel dat de cyclische groep voortgebracht door u en de cyclische groep voortgebracht door v enkel het neutraal element e gemeen hebben.

   Stel ook dat $\text{ggd}(r, s) = d$.

   Wat is de orde van het element $u \cdot v$?

6. Bewijs dat in een eindig veld F_q het produkt van alle verschillende niet-nul elementen gelijk is aan -1.