TWEEDE KANDIDATUUR WISKUNDE — VRIJDAG 21 JUNI 1996

NAMIDDAG, 14:00h – 17.00h. — EERSTE ZITTIJD

Examen Oefeningen Projectieve Meetkunde

Vraag 1. Zij V een $(n+1)$-dimensionale vectorruimte over een veld $\mathbb{K}$ met karakteristiek 2. Zij β een pseudo polariteit, U de deelruimte van $PG(V)$ waarvoor de puntenverzameling precies de verzameling der absolute punten is van β, zij $\mathcal{W}$ de verzameling der absolute hypervlakken t.o.v. β, en zij W de deelruimte van $PG(V)$ bekomen door de doorsnede te nemen van alle elementen van $\mathcal{W}$ (indien $\mathcal{W}$ ledig is, stellen we $W = PG(V)$).

1. Bewijs dat $U^\beta = W$. Wat is W^β?
2. Bewijs dat $\dim U + \dim W = n-1$, waar dim de projectieve dimensie voorstelt.
3. Onderstel dat $U \cap W = \emptyset$. Definieer $\varphi : U \to U : U' \mapsto U'^\beta \cap U$, voor alle deelruimten U' van U. Bewijs dat φ een polariteit is van U. Welke soort polariteit is φ?
4. Zij X een deelruimte van $U \cap W$. Bewijs dat $U \subseteq X^\beta$.
5. Als $n = 2$ and $\mathbb{K} = GF(q)$, tel dan het aantal verschillende pseudo polariteiten. Hoeveel daarvan hebben eenzelfde U, respectievelijk een zelfde W, respectievelijk een zelfde U en W?
6. Zoek een vergelijking van U en W voor $n = 3$, met $\mathbb{K} = GF(2)(t)$, en waarvoor β t.o.v. een basis de volgende matrix heeft:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1+t & 1+t^2 & 1/t \\ 1+t & t & t^2+t & t+1/t \\ 1+t^2 & t+t^2 & t^2 & 0 \\ 1/t & t+1/t & 0 & t^3 \end{bmatrix}.$$

   Wat is hier $U \cap W$?

Vraag 2. Gegeven in $PG(3,q)$, q oneven, de polariteit β waarvoor de verzameling $\mathcal{K}$ der absolute punten gegeven wordt door de vergelijking

$$X_0X_1 + X_2X_3 = X_2^2$$

ten opzichte van een zekere basis.

1. Welk soort polariteit is β?
2. Bepaal alle perspectiviteiten α met as $X_2 = X_3$ die $\mathcal{K}$ invariant laten.
3. Bepaal alle perspectiviteiten α met as $X_3 = 0$ die $\mathcal{K}$ invariant laten.
4. Bewijs dat, voor elk zulke α, er geldt $[\alpha, \beta] = 1$.

SCHRIJF ELKE OEFENING OP EEN AFZONDERLIJK DUBBEL BLAD. VERGEET JE NAAM NIET TE VERMELDEN OP ELK BLAD!