Numerieke Analyse 1995–1996. Tweede examenperiode.

OEFENINGEN

1. Zij $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, waarbij alle elementen nul zijn, behalve de elementen op de diagonalen. M.a.w. enkel de elementen $a_{i,i}$ en $a_{i,n+1-i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ kunnen van nul verschillen. Neem aan dat $n = 2m + 1$; dan heeft A de volgende gedaante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & & & & & a_{1,n} \\ & a_{2,2} & & & & a_{2,n-1} & \\ & & \ddots & & ⋰ & & \\ & & & a_{m+1,m+1} & & & \\ & & ⋰ & & \ddots & & \\ & a_{n-1,2} & & & & a_{n-1,n-1} & \\ a_{n,1} & & & & & & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

   a) Herschrijf het **Algoritme** *LU-factorisatie* voor zulke matrices. Wanneer bestaat de LU-factorisatie? Hoeveel elementaire rekenkundige bewerkingen vereist deze factorisatie?

   b) Neem aan dat in $A = LU$ alle $u_{i,i} \neq 0$. Herschrijf het **Algoritme** *Oplossing_van_ $LUx = b$*, rekening houdend met de specifieke vorm van L en U voor de gegeven A. Bepaal opnieuw het aantal elementaire rekenkundige bewerkingen.

2. Gegeven is de volgende matrix :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}, \qquad (a \in \mathbb{R}).$$

   a) Voor welke a-waarden is A positief definiet?

   b) Stel de iteratiematrix C op voor de iteratieve oplossing van een stelsel $Ax = b$ d.m.v. de Gauss-Jacobi methode. Geef een *nodig en voldoende voorwaarde* (in termen van a) opdat het iteratieproces zou convergeren voor een willekeurige startwaarde $x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$.

3. Zij $f(x) = x^3 + 1$ en stel door $F(x)$ de Lagrange interpolatieveelterm voor door de punten $(i, f(i))$ met $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Zij $G(x)$ de Lagrange interpolatieveelterm door de punten $(0, 1)$, $(s, F(s))$ en $(t, F(t))$. Bepaal s en t $(s < t)$ zodanig dat

$$F(1) - G(1) = -\frac{1}{4} \qquad \text{en} \qquad F(2) - G(2) = \frac{3}{2}.$$

4. Maak gebruik van de techniek der genererende functies om een klasse van meervoudige-stapmethoden af te leiden (zonder bepaling van de restterm of lokale afknottingsfouten) door het integratieïnterval $[x, x + k]$ gelijk te kiezen aan $[t_{p-1}, t_{p+1}]$ (zie (8.31)) en de Newton achterwaartse interpolatieveelterm met referentiepunten $t_p, t_{p-1}, \ldots, t_{p-q}$ (zie (8.32)) te gebruiken. Geef de formules expliciet voor $q = 2$ en $q = 3$.

C