Numerieke Analyse 1995–1996. Eerste examenperiode.

OEFENINGEN

1. a) Zij $x \in \mathbb{R}^m$. Toon aan dat er steeds een Householder matrix $H \in \mathbb{R}^{m\times m}$ bestaat waarvoor $Hx = \sigma e_m$, met $e_m = (0,0,\ldots,0,1)^T$ de laatste eenheidsvector van $\mathbb{R}^m$. Geef aan hoe men H kan bepalen.

   b) Zij $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Toon aan dat A steeds kan ontbonden worden in een produkt $A = QL$ met Q een orthogonale matrix en L een benedentriangulaire matrix. Maak hiertoe gebruik van de matrices uit a).

   c) Schrijf een algoritme in pseudocode dat, voor gegeven $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ en startwaarde $QT = I_n$, L en Q expliciet bepaalt (cfr. PC-oefening 4).

2. Gegeven is de tridiagonale $n \times n$ matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1 & -1/2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 & -1/2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Toon aan dat de eigenwaarden van A gegeven worden door $\lambda_k = 1 - \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

3. Beschouw de volgende kwadratuurformule :

$$\int_0^1 f(x)dx \approx Af(0) + Bf'(\alpha).$$

   a) Bepaal A, B en α zodat de GVAN zo hoog mogelijk wordt. Wat is de GVAN?

   b) Bereken de Peano kern $K(t)$ voor de aldus bekomen kwadratuurformule.

   c) Indien $K(t)$ een vast teken heeft in $[0,1]$, stel dan een expliciete uitdrukking op voor de procesfout van de kwadratuurformule.

4. Zij $f(x)$ een reëel polynoom in x van graad n. Toon aan dat

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k \binom{m}{k} f(x+k)$$

   nul is voor $m > n$.

Numerieke Analyse 1996–1997. Eerste examenperiode.

OEFENINGEN

1. Neem aan dat $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(n \geq 2)$ symmetrisch en positief definiet is. Om de Cholesky-decompositie GG^T van A te berekenen kan men rechtstreeks gebruik maken van het bewijs van Stelling 2.2. Hiertoe schrijft men A als

$$A = \left(\begin{array}{c|c} a_{1,1} & v^T \\ \hline v & A' \end{array}\right).$$

   In de eerste stap van het algoritme voert men de volgende operatie uit op A :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & v^T \\ v & A' \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} \sqrt{a_{1,1}} & \frac{v^T}{\sqrt{a_{1,1}}} \\ \frac{v}{\sqrt{a_{1,1}}} & A' - \frac{vv^T}{a_{1,1}} \end{pmatrix}.$$

   Op dat ogenblik zit in de eerste kolom van de matrix reeds de eerste kolom van G. De tweede stap bestaat uit een identieke operatie waardoor men de tweede kolom van G bekomt, enz. De opgave is :

   (a) Schrijf een (kort) algoritme in pseudocode voor deze methode. Hou rekening met de symmetrie van de matrices, m.a.w. pas de bovenstaande operaties enkel toe op het benedentriangulaire gedeelte (inclusief diagonaal) van A.

   (b) Hoeveel elementaire rekenkundige bewerkingen vereist de Cholesky-factorisatie met deze methode?

2. Zij $a > 0$ en $f(x) = a/(a+x)$ voor $x \in \mathbb{R}_+$. Beschouw een stel equidistante interpolatiepunten $x_j = j$ voor $j = 0, 1, 2, \ldots, N$. Toon aan dat $(m \leq N)$

$$\Delta^m f(x_0) = \frac{(-1)^m m!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+m)}.$$

3. (a) Beschouw de ruimte $C[0,1]$ met norm

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

   Zij $f(x) = 2x^3 - x^2$. Bepaal een veelterm $p(x)$ van graad 2 zodanig dat $\|f-p\|_\infty$ minimaal is. Is p uniek? Wat is de waarde van $\|f-p\|_\infty$?

   (b) Beschouw de ruimte $C[0,1]$ met norm

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 f(x)^2 dx\right)^{1/2}.$$

   Zij $f(x) = 2x^3 - x^2$. Bepaal een veelterm $p(x)$ van graad 2 zodanig dat $\|f-p\|_2$ minimaal is. Is p uniek?