

Numerieke Analyse 1996–1997. Eerste examenperiode.

OEFENINGEN

1. Neem aan dat  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ( $n \geq 2$ ) symmetrisch en positief definit is. Om de Cholesky-decompositie  $GG^T$  van  $A$  te berekenen kan men rechtstreeks gebruik maken van het bewijs van Stelling 2.2. Hiertoe schrijft men  $A$  als

$$A = \left( \begin{array}{c|c} a_{1,1} & v^T \\ \hline v & A' \end{array} \right).$$

In de eerste stap van het algoritme voert men de volgende operatie uit op  $A$  :

$$\left( \begin{array}{c|c} a_{1,1} & v^T \\ \hline v & A' \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{c|c} \sqrt{a_{1,1}} & \frac{v^T}{\sqrt{a_{1,1}}} \\ \hline \frac{v}{\sqrt{a_{1,1}}} & A' - \frac{vv^T}{a_{1,1}} \end{array} \right).$$

Op dat ogenblik zit in de eerste kolom van de matrix reeds de eerste kolom van  $G$ . De tweede stap bestaat uit een identieke operatie waardoor men de tweede kolom van  $G$  bekomt, enz. De opgave is :

- (a) Schrijf een (kort) algoritme in pseudocode voor deze methode. Hou rekening met de symmetrie van de matrices, m.a.w. pas de bovenstaande operaties enkel toe op het benedentriangulaire gedeelte (inclusief diagonaal) van  $A$ .
- (b) Hoeveel elementaire rekenkundige bewerkingen vereist de Cholesky-factorisatie met deze methode?
2. Zij  $a > 0$  en  $f(x) = a/(a+x)$  voor  $x \in \mathbb{R}_+$ . Beschouw een stel equidistante interpolatiepunten  $x_j = j$  voor  $j = 0, 1, 2, \dots, N$ . Toon aan dat ( $m \leq N$ )

$$\Delta^m f(x_0) = \frac{(-1)^m m!}{(a+1)(a+2) \cdots (a+m)}.$$

3. (a) Beschouw de ruimte  $C[0, 1]$  met norm

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

Zij  $f(x) = 2x^3 - x^2$ . Bepaal een veelterm  $p(x)$  van graad 2 zodanig dat  $\|f - p\|_\infty$  minimaal is. Is  $p$  uniek? Wat is de waarde van  $\|f - p\|_\infty$ ?

- (b) Beschouw de ruimte  $C[0, 1]$  met norm

$$\|f\|_2 = \left( \int_0^1 f(x)^2 dx \right)^{1/2}.$$

Zij  $f(x) = 2x^3 - x^2$ . Bepaal een veelterm  $p(x)$  van graad 2 zodanig dat  $\|f - p\|_2$  minimaal is. Is  $p$  uniek?

theorie

①  $\int_{-1}^1 \Psi(x)^2$  minimaal  $\Leftrightarrow \Psi = \text{lin}$

② Gauss-Seidel verklaren

③ Sturm-reijen:  $w(x)$  verklaren

④ Gauss-kwadraatruimte verklaren

⑤ Adams-Bashforth verklaren

⑥ juist of fout?

\*  $A$  niet-singulier  $\Rightarrow \exists!$  LU-decompositie

\*  $A$  diagonaal dominant  $\Rightarrow$  Gauss-Seidel lineair convergent; lokal

\* tridiagonale matrix  $\Rightarrow$  LU-decompositie

\* rachtmethode op  $A^{-1}$  geeft eigenwaarden  $v$   $A$  die verst van  $\mu$  ligt