2de kand. wiskunde Groep 1

1ste zittijd 1996-97, 2de semester

Projectieve Meetkunde

Een eindige ternaire ring voldoet aan de voorwaarden (iii) en (iv) (uit de definitie van PTR) a.s.a. hij voldoet aan de voorwaarden (iv) en (v).

Geef de definitie van quasiveld.

- Bewijs dat de groep $PGL(V)$ regulier werkt op de verzameling G der geraamten van $PG(V)$. Bewijs dat de groep $P\Gamma L(V)$ transitief werkt op G en dat de fixator van een willekeurig geraamte isomorf is met $\mathrm{Aut}K$. Bewijs tenslotte dat $PSL(V)$ 2-transitief werkt op de puntenverzameling van $PG(V)$.
- Stel de standaardgedaante op van een orthogonale of hermitische polariteit in $PG(V)$, met V een vectorruimte van dimensie ≥ 2 over het veld K. Bespreek de bijzondere gevallen voor K het veld van de complexe getallen, de reële getallen, of een eindig veld.

TWEEDE KANDIDATUUR WISKUNDE MAANDAG 23 JUNI 1997

VOORMIDDAG, 08:30h - 11.00h. EERSTE ZITTIJD

Examen Oefeningen Projectieve Meetkunde

Vraag 1.

1. Gegeven $PG(3, q^2)$ en een deelvlak $\pi \cong PG(2, q)$. Hoeveel punten kan de doorsnede van een vlak isomorf met $PG(2, q^2)$ met het vlak π bezitten? Geef voor elk mogelijk kardinaalgetal X van die doorsnede, het aantal vlakken van $PG(3, q^2)$ dat π in X punten snijdt.
2. Gegeven $PG(2, \mathrm{K})$ met K een willekeurig veld. Bewijs dat je de optelling en vermenigvuldiging in K meetkundig kan definiëren. Construeer, uitgaande van een gegeven geraamte, het punt $(1, 0, 3)$ (in de onderstelling dat char $\mathrm{K} > 3$).
3. Bewijs nu (aan de hand van 2.) dat door een gegeven geraamte van $PG(2, q^2)$, juist 1 deelvlak $PG(2, q)$ van $PG(2, q^2)$ gaat.
4. Tel het aantal projectieve deelvlakken van orde q dat in een projectief vlak van orde q^2 zit.
5. Analoog aan deel 3. geldt er: gegeven een rechte $PG(1, q^2)$, dan bepaalt een geordend geraamte (e_0, e_1, e_2) een unieke deelrechte $\cong PG(1, q)$ van $PG(1, q^2)$. Gegeven een vaste deelrechte $L \cong PG(1, q)$.
   Bewijs dat er $\frac{q^2(q+1)}{2}$ deelrechten $\cong PG(1, q)$ de rechte L in 2 punten snijden, dat er $q^2 - 1$ deelrechten $\cong PG(1, q)$ de rechte L in 1 punt snijden, en dat er $\frac{q(q-1)(q-2)}{2}$ deelrechten $\cong PG(1, q)$ volledig disjunct zijn met L.

Vraag 2.

1. Zij α een orthogonale polariteit gegeven door

$$\alpha : \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

met $\mathcal{K}$ de verzameling van absolute punten.
Zij θ een collineatie, waarvan de werking op de punten gegeven wordt door

$$\theta : \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Bewijs dat θ de verzameling $\mathcal{K}$ stabiliseert $\Leftrightarrow [\theta, \alpha] = 1 \Leftrightarrow M^t A M = A$.

; BLAD OM!! DRAAI JE BLAD OM!! DRAAI JE BLAD OM!! DRAAI JE BLAD OM!! DRAAI JE BLAI

2. Gegeven in $PG(n,q)$ een $(n-2)$-dimensionale projectieve ruimte A; een rechte $B \subset A$; een rechte C met $A \cap C = \phi$; en een rechte C' in de ruimte opgespannen door B en C, zodat C' noch B, noch C snijdt.

(a) Toon aan dat $A \cap C' = \phi$.

(b) Toon aan dat er $\forall p \in B$: er bestaat juist 1 rechte $M \subset PG(n,q)$ zodat $M \cap B = \{p\}$, $M \cap C \neq \phi \neq C' \cap M$.

(c) Bewijs dat er een collineatie $\in PSL_{n+1}(q)$ bestaat die alle punten van A fixeert, alle hypervlakken door B fixeert, en C op C' afbeeldt.
(HINT: Kies een basis $(e_0, \ldots, e_n)$ in $A \cup C$ en geef geschikte coördinaten aan de punten op C'.)

(d)* Is deze collineatie uniek?

SCHRIJF ELKE OEFENING OP EEN AFZONDERLIJK DUBBEL BLAD.
VERGEET JE NAAM NIET TE VERMELDEN OP ELK BLAD!