EXAMEN WAARSCHIJNLIJKHEIDSREKENING EN STATISTIEK

academiejaar 1996-97, 29 januari 1997

---

1. Geef de definitie van :

   (a) een σ-algebra $\mathcal{F}$ over een resultatenruimte Ω;

   (b) een probabiliteitsmaat $\mathcal{P}$ over $(\Omega, \mathcal{F})$ met $\mathcal{F}$ een σ-algebra over Ω (axioma's van Kolmogorov).

   Bewijs dat $\forall A, B \in \mathcal{F}$:

   $$\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A \cap B)\,.$$

2. Geef de definitie van de empirische distributiefunctie $F_n(x)$ van een enkelvoudige random steekproef $X_1, X_2, \ldots, X_n$ getrokken uit een populatie met distributiefunctie $F_X(x)$. Bewijs dat $\forall x \in \mathbb{R} : F_n(x) \xrightarrow{P} F_X(x)$.

3. Geef voor een toevalsvector (X, Y) met gezamenlijke distributiefunctie $F_{X,Y}(x, y)$ de definitie van de regressierechte van Y op X. Bepaal de vergelijking van deze regressierechte in functie van de karakteristieken $E[X], E[Y], \mathrm{Var}[X], \mathrm{Var}[Y]$ en $\mathrm{Corr}[(X, Y)]$.

4. Uit een boek van 52 speelkaarten worden at random 3 kaarten getrokken. Wat is de kans dat ten minste 2 van de 3 kaarten azen zijn? (zonder teruglegging)

5. Een absoluut continue toevalsvector (X, Y) is verdeeld met gezamenlijke probabiliteitsdichtheidsfunctie

   $$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} c(x^2 + y^2) & 0 \leq x \leq 1\,, 0 \leq y \leq 1\,, \\ 0 & \text{voor de overige } x \text{ en } y\,, \end{cases}$$

   met $c \in \mathbb{R}$ een constante.

   (a) Bepaal de waarde van de constante c.

   (b) Bereken $\mathcal{P}\{X \leq a\,, Y \leq \sqrt{1 - a^2}\}$ voor een willekeurige a met $0 < a < 1$. Voor welke waarde van a bereikt deze probabiliteit een maximum ?

   (c) Zijn X en Y onafhankelijke toevalsveranderlijken ? Verklaar.

6. Bepaal de probabiliteitsdichtheidsfunctie van $X + Y$ als X en Y onafhankelijk zijn, X uniform verdeeld is over het interval $[0, 1]$ en Y exponentieel verdeeld is met parameter λ.

7. Bij 120 worpen van een dobbelsteen heeft men respectievelijk 25, 17, 15, 23, 24 en 16 keer een 1, 2, 3, 4, 5 en 6 gegooid. Test met betrouwbaarheidsdrempel 0.05 de hypothese dat de dobbelsteen onvervalst is.

! Inmiddels wordt statistiek door iemand anders gedoceerd, dus waarschijnlijk zijn deze examenvragen niet echt relevant.

de cursusdienst

EXAMEN WAARSCHIJNLIJKHEIDSREKENING EN STATISTIEK

academiejaar 1996-97, 4 februari 1997

---

1. Geef de definitie van :

   (a) twee onafhankelijke toevalsverschijnselen A en B;

   (b) een stel onderling onafhankelijke toevalsverschijnselen $B_1, B_2, \ldots, B_n$.

   Illustreer dat het voor $n > 2$ niet volstaat dat de verschijnselen $B_1, B_2, \ldots, B_n$ twee aan twee onafhankelijk zijn, opdat ze ook onderling onafhankelijk zouden zijn.

2. Formuleer en bewijs de ongelijkheid van Chebyshev. Pas vervolgens deze ongelijkheid toe om de zwakke wet van de grote aantallen te bewijzen voor een rij $X_1, X_2, \ldots$ van onafhankelijke toevalsveranderlijken met begrensde variantie, nl. $\mathrm{Var}[X_i] < c < +\infty \quad (i = 1, 2, \ldots)$. Stelling van Cheby

3. Geef de definitie van de steekproefvariantie van een enkelvoudige random steekproef van omvang n en toon aan dat deze een echte schatter is van de variantie van de populatie. Hoe is de steekproefvariantie verdeeld als de populatie normaal verdeeld is?

4. Uit een groep van 6 mannen en 4 vrouwen wordt at random (bijvoorbeeld door lottrekking) een bestuur van 5 personen samengesteld. Wat is de kans dat in dit bestuur de vrouwen in de meerderheid zijn? probabiliteits probleem

5. Een absoluut continue toevalsveranderlijke X is verdeeld met probabiliteitsdichtheidsfunctie

$$f_X(x) = \begin{cases} c^2 x & 0 \le x \le 2\,, \\ c & 2 < x \le 3\,, \\ 0 & \text{voor de overige } x\,, \end{cases}$$

   met $c \in \mathbb{R}$ een constante.

   (a) Bepaal de waarde van de constante c.

   (b) Stel de distributiefunctie van X op en schets er de grafiek van. (verloop)

   (c) Bereken $\mathcal{P}\{1 \le X \le 4\}$.

6. Zij (X, Y) een tweedimensionale discrete toevalsvector met gezamenlijke probabiliteitsfunctie $p_{X,Y}(x, y)$ gegeven door :

$x \backslash y$	0	1	2
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

   (a) Bereken $\mathcal{P}\{Y \ge 1 | X = 0\}$;

   (b) Bepaal de covariantiematrix van (X, Y);

   (c) Zijn X en Y ongecorreleerd ? Zijn X en Y onafhankelijk ?

7. Als X_1, X_2 en X_3 drie onafhankelijke standaard normaal verdeelde toevalsveranderlijken zijn, bereken de waarde van de reële constante a waarvoor

$$\mathcal{P}\{X_1 \le a\sqrt{2X_2^2 + 2X_3^2}\} = 0.95\,.$$