

Numerieke Analyse 1996–1997. Tweede examenperiode.

OEFENINGEN

1. Zij  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Toon aan dat

$$\|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_\infty.$$

2. Zij  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  een matrix met bandstructuur, d.w.z.  $a_{i,j} = 0$  voor  $|i - j| \geq p$ , met  $p$  een gegeven geheel getal dat (veel) kleiner is dan  $n$ . Bij voorbeeld, voor  $n = 6$  en  $p = 3$  heeft  $A$  de volgende gedaante :

$$A = \begin{pmatrix} * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \end{pmatrix}.$$

Herschrijf het Algoritme *LU-factorisatie* voor zulke matrices, waarbij je mag aannemen dat een rechtstreekse *LU-factorisatie* bestaat. Hoeveel elementaire rekenkundige bewerkingen vereist deze factorisatie?

3. Beschouw de volgende kwadratuurformule :

$$\int_0^1 f(x) dx \approx I(f) = Af(\alpha) + Bf'(\frac{1}{3}).$$

- Bepaal de oplossing(en) voor  $A, B$  en  $\alpha$  zodat de GVAN zo hoog mogelijk wordt. Wat is de GVAN?
- Bereken de Peano kern  $K(t)$  voor de aldus bekomen kwadratuurformule(s).
- Indien  $K(t)$  een vast teken heeft in  $[0, 1]$ , stel dan een expliciete uitdrukking op voor de procesfout van de kwadratuurformule(s).