2de kand. wiskunde

2de zittijd 1996-97

Projectieve Meetkunde

(a) Beschouw een projectief vlak $\mathcal{P}$ dat gecoördinatiseerd wordt aan de hand van een verzameling R. Is (R,T) de corresponderende ternaire ring, dan gelden volgende eigenschappen: ...

(b) Is voor een TR (R,T) voldaan aan (i) en (ii), dan zijn de elementen 0 en 1 ondubbelzinnig bepaald.

- Bewijs dat een bijectie α van de puntenverzameling van $PG(V)$, $d(V) \geq 3$, op de puntenverzameling van $PG(W)$ een collineatie induceert als en slechts als elke 3 collineaire punten van $PG(V)$ (respectievelijk $PG(W)$) door α (respectievelijk α^{-1}) worden afgebeeld op 3 collineare punten van $PG(W)$ (respectievelijk $PG(V)$). Bewijs dat een bijectie α van de puntenverzameling van $PG(V)$ op de hypervlakkenverzameling van $PG(W)$, met $md(V) = md(W)$, een correlatie induceert als en slechts als elke drie collineaire punten van $PG(V)$ door α afgebeeld worden op drie hypervlakken van $PG(W)$ die een $(md(W) - 2)$-dimensionale ruimte gemeen hebben.

- Bespreek de aard van een kegelsnede in functie van de coefficiënten van haar vergelijking in $PG(2, K)$, met K een veld (met nodig en voldoende voorwaarden voor irreducibiliteit) en geef voorbeelden in elk van de verschillende gevallen. Bespreek de eigenschappen van de kern. Specialiseer dit alles voor K het veld van de complexe getallen, de reële getallen, of een eindig veld.

NAMIDDAG, 14:00h - 17:00h. TWEEDE ZITTIJD

TWEEDE KANDIDATUUR WISKUNDE MAANDAG 8 SEPTEMBER 1997

Examen Oefeningen Projectieve Meetkunde

Vraag 1. (a) Gegeven de driedimensionale projectieve ruimte $PG(3, q^2)$. Hoeveel punten heeft een rechte $L \cong PG(1, q^2)$ van $PG(3, q^2)$ gemeen met een driedimensionale deelruimte π van orde q van $PG(3, q^2)$ (dus $\pi \cong PG(3, q)$)?
Geef alle mogelijkheden.

(b) Geef voor elk kardinaalgetal α van die doorsnede (zoals berekend hierboven), het aantal rechten ($\cong PG(1, q^2)$) van $PG(3, q^2)$ dat α punten gemeen heeft met π.

(c) Nu beschouwen we een grotere ruimte, nl. $PG(4, q^2)$.
Gegeven: door een punt in $PG(3, q')$ gaan er $q'^2 + q' + 1$ rechten van $PG(3, q')$.
door een punt in $PG(4, q')$ gaan er $q'^3 + q'^2 + q' + 1$ rechten van $PG(4, q')$.
In $PG(4, q^2)$ nemen we een driedimensionale ruimte π van orde q, dus $\pi \cong PG(3, q)$. Hoeveel punten bevat de doorsnede van π met een rechte $M \cong PG(1, q^2)$ van de vierdimensionale ruimte $PG(4, q^2)$? Geef alle mogelijkheden.

(d) Geef voor elk kardinaalgetal β van die doorsnede (zoals berekend hierboven), het aantal rechten ($\cong PG(1, q^2)$) van $PG(4, q^2)$ dat β punten gemeen heeft met π.

(e) Vergeet de proef niet te doen.

Vraag 2. (a) Gegeven in $PG(2, q)$ een kegelsnede K en drie punten a, b, p, met $a, b \in K$. Het punt p is het snijpunt van de raaklijnen in a en b aan de kegelsnede K. Bovendien is er een perspectiviteit π die de punten a, b en p fixeert, evenals de kegelsnede K.
Gevraagd: geef as, centrum, orde van deze perspectiviteit en bewijs.
[illegible] : 2, 3) Voor welke velden bestaat zulke perspectiviteit?

(b) Nu stellen we $q = 3$. De punten a, b en p geven we (over het veld $GF(3)$) de coördinaten $a(0, 0, 1)$, $b(1, 1, 0)$, $p(1, 0, 1)$. Een vergelijking van een kegelsnede K door a en b, en met ab de poollijn van p, luidt als volgt:

$$K \leftrightarrow x^2 + 2y^2 + yz = 0$$

$\rightarrow$ fixeert a, b en p en $K^\pi = K$

De werking van de perspectiviteit π (zoals hierboven uiteengezet), kunnen we als volgt schrijven:

$$\pi : \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Bereken de matrix $A = (a_{ij})$, wetende dat π zowel a, b en p fixeert als de kegelsnede K op zichzelf afbeeldt.
(Hint: een derde punt van de kegelsnede is $(1, m, 0) = (1, 2, 0)$.)