Numerieke Analyse 1997–1998. Eerste examenperiode.

NAAM :

THEORIE

1. Zij $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ met $a_{ii} \neq 0$. De Gauss-Jacobi-methode gebruikt het iteratieschema

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right), \tag{1}$$

of als we A opsplitsen als $A = -L + D - R$ dan is de iteratie van de vorm

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(L+R)x^{(k)} + D^{-1}b\,.$$

De iteratiematrix voor deze methode is dus $C = D^{-1}(L+R)$.
Stelling. *De Gauss-Jacobi-methode convergeert voor elke startwaarde $x^{(0)}$ als in elke rij van A het diagonaalelement dominant is, m.a.w als*

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}| \qquad \textit{voor elke } i\,. \tag{2}$$

Bewijs. $\|C\| < 1$ is voldoende voor convergentie. Passen we $\|C\|_\infty$ toe, dan vinden we de gevraagde resultaten.
Gevraagd.

- Leg uit waarom $\|C\|_\infty < 1$.
- Bestaan er matrices A die niet aan (2) voldoen, maar waarvoor de Gauss-Jacobi-methode toch convergeert? Staaf je antwoord.
- Mag men de componenten $x_i^{(k+1)}$ van de vector $x^{(k+1)}$ in een willekeurige volgorde berekenen? Leg uit.
- Onderstel dat A voldoet aan

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}| < |a_{jj}| \qquad \text{voor elke } j\,. \tag{3}$$

Wat kan je nu besluiten over de convergentie voor de Gauss-Jacobi methode?

- Als $A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, geef dan C, en geef de maat van convergentie voor de Gauss-Jacobi methode in de $\|\ \|_\infty$-norm.

2. Zij $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ met eigenwaarden λ_k die voldoen aan

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| > \cdots > |\lambda_n| > 0. \tag{4}$$

Gevraagd.

- Zij μ een gegeven complex getal. Welke eigenwaarde wordt gevonden als men de machtsmethode toepast op $A - \mu I$?
- Welke eigenwaarden van A zijn zuiver reëel?
- Neem bovendien aan dat A een orthonormale basis $v_1, v_2, \ldots, v_n$ van eigenvectoren bezit met $Av_k = \lambda_k v_k$. Stel $B = \lambda_1 v_1 v_1^T$. Welke eigenwaarde (resp. eigenvector) wordt gevonden als men de machtsmethode toepast op $A - B$?
- Welke eigenwaarde wordt gevonden als men de inverse machtsmethode toepast op $A + iI$?

3. Neem aan dat $x_0, x_1, \ldots, x_n$ onderling verschillende reële punten zijn, en $p_n(x)$ is de interpolatieveelterm door de punten (x_i, y_i). Deze veelterm kan als volgt geschreven worden :

$$p_n(x) = \gamma_0 + \gamma_1(x-x_0) + \gamma_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + \gamma_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})\,. \tag{1}$$

Als $y_i = f(x_i)$ voor een bepaalde functie f, dan worden de coëfficiënten γ_n de n^e orde Newton-differentiequotiënten van f genoemd :

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) \\ &\quad + \cdots + f[x_0,x_1,\ldots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})\,. \end{aligned} \tag{2}$$

De Lagrange-vorm voor $p_n(x)$ wordt gegeven door

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\Psi(x)}{\Psi'(x_j)(x-x_j)} f(x_j)\,, \tag{3}$$

waarbij $\Psi(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$. Uit (2) en (3) volgt dan dat

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \sum_{j=0}^{n} \frac{f(x_j)}{\Psi'(x_j)}. \tag{4}$$

Als de punten $x_0, x_1, \ldots, x_n$ bovendien equidistant liggen (m.a.w. $x_j = x_0 + jh$), dan kan men een variabele t invoeren en $p_n(x)$ als volgt noteren :

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{t}{j} \Delta^j f_0, \qquad t = \frac{x - x_0}{h}, \tag{5}$$

waarbij $\Delta^m f_j$ de voorwaartse differentie van orde m voorstelt, $\Delta^m f_j = \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k} f_{j+k}$, en $f_j = f(x_j)$.

- Moet de functie f aan bepaalde afleidbaarheidsvoorwaarden voldoen opdat (2) zou gelden?
- Wanneer bestaat de limiet $\lim_{x_1 \to x_0} f[x_0, x_1]$?
- Verklaar hoe men (4) vindt.
- Neem aan dat $f(x)$ een polynoom van graad m voorstelt. Hoe ziet men in dat $f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = 0$ voor $n > m$?
- Geef in het geval van equidistante interpolatiepunten een eenvoudige uitdrukking voor $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \Delta^j f_0$ in termen van de functiewaarden f_j.

4. Meervoudige-stapmethoden voor het beginwaardeprobleem

$$y' = f(t, y) \qquad a \le t \le b \qquad y(a) = \alpha$$

worden dikwijls afgeleid door de vergelijking te integreren over een interval $[x, x+k] \subset [a, b]$:

$$y(x+k) = y(x) + \int_x^{x+k} f(t, y(t))dt. \qquad (1)$$

Bij de Adams-formules maakt men gebruik van de Newton-achterwaartse-interpolatieveelterm voor $f(t, y(t))$ door de punten $t_{p-q}, \ldots, t_{p-1}, t_p$ (neem aan dat $q \ge 2$). Voor de Adams-Bashforth-methode kiest men $[x, x+k] = [t_p, t_{p+1}]$.

De methodes van Milne zijn evenens gesteund op (1), doch dit keer kiest men $[x, x+k]$ zodanig dat dit interval een aantal referentiepunten t_i omvat, en past men een kwadratuurformule toe voor de integraal.

- Geef voor elk van de volgende keuzes voor $[x, x+k]$ aan of de bekomen Adams-methode impliciet of expliciet is. Geef bovendien de m-waarde (in termen van q) van de bekomen m-voudige-stapmethode.

$[x, x+k]$	impliciet of expliciet	m-waarde
$[t_p, t_{p+1}]$	ex	1
$[t_{p-1}, t_p]$	im	1
$[t_{p-2}, t_{p+1}]$	ex	2
$[t_{p+1}, t_{p+2}]$	…	…

- Welke kwadratuurformules geven aanleiding tot een expliciete, resp. impliciete, methode van Milne?

NC open   NC gesloten

- Hoe kan men in de praktijk impliciete meervoudige-stapmethoden gebruiken? predictor corrector
- Als men bij de methode van Milne $[x, x+k] = [t_{p-q-1}, t_{p+1}]$ kiest en vervolgens de Newton-Cotes-formule van open type gebruikt, bekomt men dan de Adams-Bashforth formules?

5. Zijn de volgende uitspraken waar of vals? Geef telkens een uitleg voor jouw antw

- Zij $\| \; \|$ een norm voor $\mathbb{R}^{n \times n}$, en I de $n \times n$ eenheidsmatrix. Dan is $\|I\| = 1$.
- Positief-definiete reële matrices bezitten een unieke LU-factorisatie.
- Neem aan dat $f \in C_2[a, b]$ en dat $\xi \in [a, b]$ een nulpunt is van f. Dan converg de Newton-Raphson methode voor elke startwaarde uit $[a, b]$, doch de converg is niet altijd kwadratisch.
- Als $p_n(x)$ een monische veelterm van graad n is, dan geldt

$$\max_{x \in [-1,1]} |p_n(x)| \le \frac{1}{2^n}.$$

- Gegeven een gewichtsfunctie $w(x)$ over $[a, b]$, en $\phi_k(x)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ de o gonale polynomen in $[a, b]$ t.o.v. $w(x)$. Als men onder het integraalteken in $\int_a^b w(x)f(x)dx$, $f(x)$ vervangt door $\phi_n(x)$, dan bekomt men de waarde van de G kwadratuur $\sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$ voor I.
- Zij $t \in \mathbb{R}$ en stel

$$g_t(x) = (x-t)_+^n = \begin{cases} (x-t)^n & \text{als} \quad x \ge t \\ 0 & \text{als} \quad x < t\,, \end{cases}$$

Dan is $\dfrac{d^n g_t(x)}{dx^n}$ een constante functie over $\mathbb{R}$.

- Zij $f \in C_{n+1}[a, b]$, $x_0, x_1, \ldots, x_n$ onderling verschillende getallen in $[a, b]$ en $p_n(x)$ interpolatieveelterm door de punten $(x_i, f(x_i))$. Voor elke $t \in [a, b]$ bestaat er een $\xi(t) \in [a, b]$ zodat

$$f(t) = p_n(t) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(t))}{(n+1)!}(t-x_0)\cdots(t-x_n).$$

De functie $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ met $g(t) = f^{(n+1)}(\xi(t))$ bestaat en is continu in $[a, b]$.

Numerieke Analyse 1997–1998. Eerste examenperiode.

OEFENINGEN

1. Neem aan dat $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, en schrijf A als

$$A = (\ A_1 \ \ A_2 \ \ \cdots \ \ A_n\ ),$$

m.a.w. $A_j \in \mathbb{R}^n$ stelt de j^e kolom van de matrix A voor. Definieer nu

$$\|A\| = \max_{1\le j\le n} \|A_j\|_2,$$

waarbij $\|\ \|_2$ de gewone 2-norm voor vectoren van $\mathbb{R}^n$ voorstelt. Toon aan :

(a) $\|\ \|$, zoals hierboven gedefinieerd, is een norm voor $\mathbb{R}^{n\times n}$.

(b) Als $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, dan geldt $\|AB\| \le \|A\|_2\, \|B\|$, met $\|A\|_2$ de 2-norm in $\mathbb{R}^{n\times n}$.

(c) $\|A\|_2 \le \sqrt{n}\,\|A\|$.

2. Zij A een reële symmetrische $(n\times n)$-matrix. Dan kan A in $(n-2)$ stappen getransformeerd worden tot een tridiagonale (symmetrische) matrix, waarbij in elke stap k een gelijkvormigheidstransformatie wordt uitgevoerd d.m.v. een Householder-matrix (zie cursus, §4.2).

(a) Stel een **Algoritme** op (in pseudocode) dat voor een gegeven reële symmetrische matrix A deze transformaties doorvoert. Maak hierbij gebruik van hulpvectoren p en q zoals besproken in §4.2.

(b) Pas dit algoritme toe op

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Beschouw de volgende kwadratuurformule[1] :

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx I(f) = Af(\frac{-1}{\sqrt{3}}) + Bf(\frac{1}{\sqrt{3}}).$$

(a) Bepaal A en B zodat de GVAN zo hoog mogelijk wordt. Wat is de GVAN?

(b) Bereken de Peano kern $K(t)$ voor de aldus bekomen kwadratuurformule.

(c) Indien $K(t)$ een vast teken heeft in $[-1,1]$, stel dan een expliciete uitdrukking op voor de procesfout van de kwadratuurformule.

(d) Bestaat er een verband met gekende kwadratuurformules?

---

[1] $\sqrt{3} \approx 1.732 > \frac{45}{26} \approx 1.731$

Numerieke Analyse 1998–1999. Eerste examenperiode.

OEFENINGEN

1. Gegeven is de volgende matrix :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2a & 0 \\ 0 & 1 & 2a \\ 2a & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (a \in \mathbb{R}).$$

a) Voor welke a-waarden is A positief-definiet?

b) Stel de iteratiematrix C op voor de iteratieve oplossing van een stelsel $Ax = b$ d.m.v. de Gauss-Seidel-methode. Geef een *nodig en voldoende voorwaarde* (in termen van a) opdat het iteratieproces zou convergeren voor een willekeurige startwaarde $x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$.

2. De veelterm $p_n(x)$ wordt als volgt bepaald :

$$p_n(x) = (x_1 - x)(x_2 - x)\cdots(x_n - x),$$

met $x_1, x_2, \ldots, x_n$ onderling verschillende reële getallen. Beschouw verder

$$p_{j-1}(x) = -p_j'(x) = -\frac{dp_j(x)}{dx}, \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Toon aan dat $p_n(x), p_{n-1}(x), \ldots, p_1(x), p_0(x)$ een Sturm-rij vormt.

3. Bepaal de monische vierdegraadsveelterm(en) $p(x)$ waarvoor

$$M = \max_{x\in[0,2]} |p'(x)| \qquad (p'(x) = \frac{dp}{dx})$$

minimaal is. Wat is de waarde van M?

4. Beschouw onderling verschillende reële getallen $x_0, x_1, \ldots, x_n$ en een stel reële getallen $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Gebruik interpolatietheorie (of eventueel een andere methode) om aan te tonen dat

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{\prod_{k=1}^{n}(x_j - y_k)}{\prod_{k=0(k\ne j)}^{n}(x_j - x_k)} = 1.$$