Numerieke Analyse 1999–2000. Eerste examenperiode.

OEFENINGEN

1. Zij $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ een "beneden-Hessenberg-matrix", i.e. een matrix met $a_{ij} = 0$ voor $j - i \geq 2$. De algemene vorm van zo'n matrix wordt geïllustreerd voor $n = 5$:

$$A = \begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix},$$

Neem aan dat A een rechtstreekse LU-factorisatie bezit (m.a.w. dat de pivotelementen nooit nul worden).

a) Herschrijf het **Algoritme** *LU-factorisatie* voor zulke matrices (waarbij geen overbodige berekeningen worden uitgevoerd). Welke speciale vorm heeft U?

b) Hoeveel elementaire rekenkundige bewerkingen vereist deze factorisatie?

2. Gegeven is de volgende matrix :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Stel de iteratiematrix C_ω uit de SOR-methode expliciet op.

b) Ga na voor welke ω-waarden de SOR-methode convergent is voor elke startwaarde.

c) Neem aan dat $0 \leq \omega \leq 1$. Bepaal $\|C_\omega\|_1$, in functie van ω.

3. Beschouw de ruimte $C[-1, 1]$ met norm

$$\|f\|_2 = \left(\int_{-1}^{1} f(x)^2 dx \right)^{1/2}.$$

Zij $f(x) = x^4$. Bepaal een veelterm $p(x)$ van graad 2 zodanig dat $\|f - p\|_2$ minimaal is. Is p uniek?

4. Bepaal met behulp van Chebyshev-polynomen een expliciete uitdrukking voor

$$\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right).$$