Numerieke Analyse 2000–2001. Eerste examenperiode.

OEFENINGEN

1. Gegeven zijn twee vectoren $u, v \in \mathbb{R}^n$, met $\|u\|_2 = \|v\|_2 = 1$ en $\langle u, v \rangle = 0$. Beschouw de matrix $A = I - uv^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Bepaal $\|A\|_2$.

2. Zij $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ met $n = 2m+1$ oneven, met $a_{i,j} = a_{i,n+1-j} = a_{n+1-i,j} = a_{n+1-i,n+1-j} = 0$ voor elke $j < i \leq m+1$. Deze speciale vorm van zo'n matrix (zandlopervorm) wordt geïllustreerd voor $m = 3$ $(n = 7)$:

$$A = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & 0 & 0 \\ 0 & * & * & * & * & * & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}.$$

$\to a_{m+1,\,m+1}$

Neem aan dat A een rechtstreekse LU-factorisatie bezit (m.a.w. dat de pivotelementen nooit nul worden). Herschrijf het **Algoritme** *LU-factorisatie* voor zulke speciale matrices, zodanig dat er geen overbodige berekeningen worden uitgevoerd (m.a.w. hou rekening met de posities waar reeds een nulelement staat). Welke speciale vormen hebben L en U?

3. Stel dat $f(x)$ een monisch polynoom is van graad $n+2$, en $p_n(x)$ de interpolatieveelterm door de punten $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, \ldots, n$ (zoals steeds zijn de x_i's onderling verschillend). Als $f(0) - p_n(0) = (-1)^n$, bepaal dan alle snijpunten van $f(x)$ en $p_n(x)$.

4. Beschouw de volgende kwadratuurformule :

$$\int_{-1}^{1} (1-x)(1+x) f(x)\,dx \approx I(f) = Af(x_1) + Bf(x_2).$$

Bepaal A, B, x_1 en x_2 zodat de GVAN zo hoog mogelijk wordt. Wat is de GVAN?