EXAMEN WAARSCHIJNLIJKHEIDSREKENING EN STATISTIEK

academiejaar 2000-2001, 9 februari 2001

9h

9h30 1. Formuleer en bewijs de regel van Bayes.

10h 2. Geef de definitie van de correlatiecoëfficiënt van een koppel toevalsveranderlijken (X, Y). Toon aan dat als X en Y onafhankelijk zijn, zij eveneens ongecorreleerd zijn. Toon met een voorbeeld aan dat ongecorreleerde toevalsgrootheden niet noodzakelijk onafhankelijk zijn.

10h30 3. Toon aan hoe men tot de χ^2 test (goodness-of-fit) komt voor het toetsen van een hypothese aangaande de theoretische verdeling van een populatie.

11h 4. Wat is de kans dat men een onvervalst muntstuk een oneven aantal keren moet werpen om de eerste keer 'kop' te bekomen?

11h30 5. Urne A bevat 2 witte ballen en urne B 2 rode ballen. Men trekt achtereenvolgens telkens één bal at random uit elk van beide urnes en legt daarna de bal getrokken uit urne A in urne B en de bal getrokken uit urne B in urne A. Men zegt dat het systeem zich in toestand i bevindt als urne A i witte ballen bevat ($i \in \{0, 1, 2\}$). De opeenvolging van toestanden van het systeem vormt een homogene Markov-keten.

   (a) Bepaal de transitiematrix π_1 van deze Markov-keten.

   (b) Is de ergodenstelling van toepassing op deze keten en zo ja, bereken de limietmatrix π_∞.

12h 6. Veronderstel dat X en Y twee onafhankelijke normaal verdeelde veranderlijken zijn met respectieve verwachtingswaarden μ_X en μ_Y en met zelfde variantie σ^2. Bepaal de parameters μ_X, μ_Y en σ als bekend is dat:

$$P\{X < 2.18\} = 0.7995\,, \quad P\{Y > 1.88\} = 0.33\,, \quad P\{3X \leq 4Y\} = 0.5987\,.$$

12h30 7. Zij $X_1, X_2, \ldots, X_n$ een random steekproef van omvang n uit een universum met probabiliteitsdichtheid :

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha\, x^{\alpha-1} & \text{als } x \in [0,1]\,, \\ 0 & \text{als } x \notin [0,1]\,, \end{cases}$$

met reële parameter $\alpha > 0$.

   (a) Ga na dat $f_X(x)$ voor alle $\alpha > 0$ de eigenschappen van een dichtheidsfunctie bezit.

   (b) Construeer de maximumkansschatter $\hat{\alpha}_{mk}$ van α.

   (c) Bepaal met de momentenmethode de schatter $\hat{\alpha}_{mm}$ van α

enquête

examen: 3 vragen theorie
3 oefeningen
(3h werktijd)

rekenmachine en appendices toegelaten

THEORIEVRAGEN

H I

1. Geef de definitie van :

p33-34 (a) twee onafhankelijke toevalsverschijnselen A en B;

p34 (b) een stel onderling onafhankelijke toevalsverschijnselen $B_1, B_2, \ldots, B_n$.

p35 Illustreer met een voorbeeld dat het voor $n > 2$ niet volstaat dat de verschijnselen $B_1, B_2, \ldots, B_n$ twee aan twee onafhankelijk zijn, opdat ze ook onderling onafhankelijk zouden zijn.

2. Geef de definitie van :

p27 (a) een σ-algebra $\mathcal{F}$ over een resultatenruimte Ω;

p28 (b) een probabiliteitsmaat $\mathcal{P}$ over $(\Omega, \mathcal{F})$ met $\mathcal{F}$ een σ-algebra over Ω (axioma's van Kolmogorov).

p29 (c) Bewijs dat $\forall A, B \in \mathcal{F}$:

$$\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A \cap B)\,.$$

p35 3. Formuleer en bewijs de totale probabiliteitsformule.

p36 4. Formuleer en bewijs de regel van Bayes.

H II

p51 + p53-54 5. Geef de definitie van een homogene Markov-keten en van de transitiematrix. Formuleer en bewijs voor dergelijke keten de vergelijking van Markov.

H III

6. Geef de definitie van :

p57 (a) Een reële toevalsveranderlijke over een probabiliteitsruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$;

p58 (b) De distributiefunctie $F_X(x)$ van een toevalsveranderlijke X

p58-59 (c) Welke eigenschappen moet een functie $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ bezitten opdat ze de distributiefunctie van een toevalsgrootheid zou kunnen zijn?

p70 7. Welke eigenschappen moet een functie van n veranderlijken bezitten opdat ze de gezamenlijke distributiefunctie van een n-dimensionale toevalsvector zou kunnen zijn?

p71 Toon aan dat de functie

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{als } x < 0 \text{ of } x + y < 1 \text{ of } y < 0, \\ 1 & \text{in het overige gedeelte van het vlak} \end{cases}$$

geen distributiefunctie van een bivariate toevalsvector kan zijn.

H IV

p90 p92 8. Geef de definitie van de variantie van een toevalsveranderlijke X. Geef en bewijs de regel om de variantie van de som van twee onafhankelijke toevalsveranderlijken te berekenen.

p94 Breid die regel uit voor de berekening van de variantie van de som van twee afhankelijke toevalsveranderlijken.

p95 9. Geef de definitie van de correlatiecoëfficiënt van een koppel toevalsveranderlijken (X, Y).
p95 Toon aan dat als X en Y onafhankelijk zijn, zij eveneens ongecorreleerd zijn. Toon met
p95-96 een voorbeeld aan dat ongecorreleerde toevalsgrootheden niet noodzakelijk onafhankelijk zijn.

H V p106 10. Formuleer en bewijs de ongelijkheid van Chebyshev. Pas vervolgens deze ongelijkheid
p106-107 toe om de zwakke wet van de grote aantallen te bewijzen voor een rij $X_1, X_2, \ldots$ van onafhankelijke toevalsveranderlijken met begrensde variantie, nl. $\mathrm{Var}[X_i] < c < +\infty \quad (i = 1, 2, \ldots)$.

H VI p122 11. Geef de definitie van de steekproefvariantie van een enkelvoudige random steekproef van omvang n en toon aan dat deze een echte schatter is van de variantie van de populatie.
p123 Hoe is de steekproefvariantie verdeeld als de populatie normaal verdeeld is?

p128 12. Geef de definitie van de empirische distributiefunctie $F_n(x)$ van een enkelvoudige random steekproef $X_1, X_2, \ldots, X_n$ getrokken uit een populatie met distributiefunctie $F_X(x)$.
p129 Bewijs dat $\forall x \in \mathbb{R} : F_n(x) \xrightarrow{P} F_X(x)$.

H VII 13. Leg uit hoe men met

p136 a) de maximum-kansmethode

p139 b) de momentenmethode

puntschatters van een parameter construeert.

H VIII 14. Verklaar de volgende begrippen : nulhypothese, alternatieve hypothese, enkelvoudige
p143-144 hypothese, tweezijdige alternatieve hypothese, testfunctie, fout van type I van een test, fout van type II van een test, macht van een test.

p150 15. Leg uit hoe men tot de t-test komt voor het toetsen van een hypothese aangaande een verwachtingswaarde uit een normale populatie met onbekende variantie.

p151-153 16. Toon aan hoe men tot de χ^2 test komt voor het toetsen van een hypothese aangaande de theoretische verdeling van een populatie.