MESSIAEN

KARL

EXAMEN WAARSCHIJNLIJKHEIDSREKENING EN STATISTIEK

academiejaar 2000-2001, 29 augustus 2001

---

1. Geef de definitie van een homogene Markov-keten en van de transitiematrix. Formuleer en bewijs voor dergelijke keten de vergelijking van Markov.

2. Geef de definitie van de variantie van een toevalsveranderlijke X. Geef en bewijs de regel om de variantie van de som van twee onafhankelijke toevalsveranderlijken te berekenen. Breid die regel uit voor de berekening van de variantie van de som van twee afhankelijke toevalsveranderlijken.

3. Leg uit hoe men met de maximum-kansmethode een puntschatter van een parameter construeert.

4. Wat is de kans om met 5 (onvervalste) dobbelstenen een "full" te gooien (d.i. 3 gelijke ogen + 2 gelijke ogen, onderling verschillend).

5. Het aantal dagen hospitalisatie na een welbepaalde chirurgische ingreep is een toevalsveranderlijke $Y = X + 4$, waarbij X de volgende probabiliteitsdichtheidsfunctie bezit:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{32}{(x+4)^3}, & x > 0 \\ 0, & \text{overige } x. \end{cases}$$

   Wat is de verwachtingswaarde $E[Y]$ van het aantal hospitalisatiedagen?

6. Als Y uniform verdeeld is over het interval $[-5, 5]$, wat is dan de kans dat de wortels van de vierkantsvergelijking $4x^2 + 4xY + Y + 2 = 0$ beide reëel zijn?

7. Een machine wordt verondersteld pindanoten, hazelnoten, cashewnoten en walnoten te mengen in de verhouding 5:2:2:1. In een blik met 500 noten van het mengsel treft men 269 pindanoten, 106 hazelnoten, 80 cashewnoten en 45 walnoten aan. Test met betrouwbaarheidsdrempel 0.05 de hypothese dat de machine de noten in de verhouding 5:2:2:1 mengt.

examen: 3 vragen theorie
3 oefeningen
(3h werktijd)

rekenmachine en appendices toegelaten

THEORIEVRAGEN

H I

1. Geef de definitie van :

p33-34 (a) twee onafhankelijke toevalsverschijnselen A en B;

p34 (b) een stel onderling onafhankelijke toevalsverschijnselen $B_1, B_2, \ldots, B_n$.

p35 Illustreer met een voorbeeld dat het voor $n > 2$ niet volstaat dat de verschijnselen $B_1, B_2, \ldots, B_n$ twee aan twee onafhankelijk zijn, opdat ze ook onderling onafhankelijk zouden zijn.

2. Geef de definitie van :

p27 (a) een σ-algebra $\mathcal{F}$ over een resultatenruimte Ω;

p28 (b) een probabiliteitsmaat $\mathcal{P}$ over $(\Omega, \mathcal{F})$ met $\mathcal{F}$ een σ-algebra over Ω (axioma's van Kolmogorov).

p29 (c) Bewijs dat $\forall A, B \in \mathcal{F}$:

$$\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A \cap B)\,.$$

p35 3. Formuleer en bewijs de totale probabiliteitsformule.

p36 4. Formuleer en bewijs de regel van Bayes.

H II

p51 + p53-54 5. Geef de definitie van een homogene Markov-keten en van de transitiematrix. Formuleer en bewijs voor dergelijke keten de vergelijking van Markov.

H III

6. Geef de definitie van :

p57 (a) Een reële toevalsveranderlijke over een probabiliteitsruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$;

p58 (b) De distributiefunctie $F_X(x)$ van een toevalsveranderlijke X

p58-59 (c) Welke eigenschappen moet een functie $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ bezitten opdat ze de distributiefunctie van een toevalsgrootheid zou kunnen zijn?

p70 7. Welke eigenschappen moet een functie van n veranderlijken bezitten opdat ze de gezamenlijke distributiefunctie van een n-dimensionale toevalsvector zou kunnen zijn?

p71 Toon aan dat de functie

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{als } x < 0 \text{ of } x + y < 1 \text{ of } y < 0, \\ 1 & \text{in het overige gedeelte van het vlak} \end{cases}$$

geen distributiefunctie van een bivariate toevalsvector kan zijn.

H IV

p90 p92 8. Geef de definitie van de variantie van een toevalsveranderlijke X. Geef en bewijs de regel om de variantie van de som van twee onafhankelijke toevalsveranderlijken te berekenen.
p94 Breid die regel uit voor de berekening van de variantie van de som van twee afhankelijke toevalsveranderlijken.

p95 9. Geef de definitie van de correlatiecoëfficiënt van een koppel toevalsveranderlijken (X, Y).
p95 Toon aan dat als X en Y onafhankelijk zijn, zij eveneens ongecorreleerd zijn. Toon met
p95-96 een voorbeeld aan dat ongecorreleerde toevalsgrootheden niet noodzakelijk onafhankelijk zijn.

H V p106 10. Formuleer en bewijs de ongelijkheid van Chebyshev. Pas vervolgens deze ongelijkheid
p106-107 toe om de zwakke wet van de grote aantallen te bewijzen voor een rij $X_1, X_2, \ldots$ van onafhankelijke toevalsveranderlijken met begrensde variantie, nl. $\mathrm{Var}[X_i] < c < +\infty \quad (i = 1, 2, \ldots)$.

H VI p122 11. Geef de definitie van de steekproefvariantie van een enkelvoudige random steekproef van omvang n en toon aan dat deze een echte schatter is van de variantie van de populatie.
p123 Hoe is de steekproefvariantie verdeeld als de populatie normaal verdeeld is?

p128 12. Geef de definitie van de empirische distributiefunctie $F_n(x)$ van een enkelvoudige random steekproef $X_1, X_2, \ldots, X_n$ getrokken uit een populatie met distributiefunctie $F_X(x)$.
p129 Bewijs dat $\forall x \in \mathbb{R} : F_n(x) \xrightarrow{P} F_X(x)$.

H VII 13. Leg uit hoe men met

p136 a) de maximum-kansmethode

p139 b) de momentenmethode

puntschatters van een parameter construeert.

H VIII 14. Verklaar de volgende begrippen : nulhypothese, alternatieve hypothese, enkelvoudige
p143-144 hypothese, tweezijdige alternatieve hypothese, testfunctie, fout van type I van een test, fout van type II van een test, macht van een test.

p150 15. Leg uit hoe men tot de t-test komt voor het toetsen van een hypothese aangaande een verwachtingswaarde uit een normale populatie met onbekende variantie.

p151-153 16. Toon aan hoe men tot de χ^2 test komt voor het toetsen van een hypothese aangaande de theoretische verdeling van een populatie.