Relativiteitstheorie (prof. H. Verschelde):

Ondervragingsvorm: Er zijn twee theorievragen, beiden schriftelijk, en ook een kort gesprekje van ca. 5 minuten.
De oefeningen (2) zijn ook schriftelijk en open boek.

Theorie:

- Het relativistisch puntdeeltje in een elektromagnetisch veld: Langrangiaan, Hamiltoniaan en covariante bewegingsvergelijkingen.
Gegeven:
$$S=-mc\int_a^b ds-\frac{e}{c}\int_a^b A^\mu\, dx_\mu$$

- Afleiding van de veldvergelijkingen van Einstein.
Gegeven (zwak veld):
$$R_{\lambda\mu\nu\kappa}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\kappa\,\partial x^\mu}-\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa\,\partial x^\lambda}-\frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^\nu\,\partial x^\mu}+\frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu\,\partial x^\lambda}\right]$$

- Bespreek het massaloze spinorveld (Weyl).

- Leid de geodetische beweging af uit de minimale lengte van de wereldlijn.
$$\Gamma^\mu_{\beta\sigma}=\frac{1}{2}g^{\mu\alpha}\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\sigma}+\frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x^\beta}-\frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial x^\alpha}\right).$$

- Bespreek de precessie van het perihelium van Mercurius.
$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\left(1-\frac{2m}{r}\right)\left(c^2+\frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right)=\frac{\tilde{E}^2}{c^2}$$

- Leid de Maxwellvergelijkingen in covariante vorm af en toon aan dat die gelijk zijn aan de gekende klassieke Maxwellvergelijkingen.
$$F^{\mu\nu}=\begin{bmatrix}0 & -E^1 & -E^2 & -E^3\\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2\\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1\\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0\end{bmatrix}$$
$$\vec{\nabla}.\vec{E}=\rho \qquad \vec{\nabla}.\vec{B}=0$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B}=\frac{1}{c}\left(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\vec{j}\right)$$

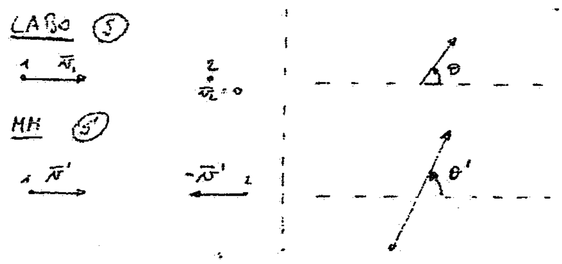
mondeling:
- Wat is het principe van mach
- de betekenis van r in Schwarzschildmetriek
- hoe ziet de tijd eruit voor een foton (→ staat stil)
- balpen op tafel
- Jules Verne in kogel

Oefeningen:

- Beschouw de botsing tussen 2 identieke deeltjes met rustmassa m_0. Veronderstel dat er N dergelijke botsingen plaatsvinden en dat de kans om een deeltje terug te vinden in de hoek (θ', θ' + dθ') gegeven wordt door

$$dP(\theta') = P(\theta')\sin\theta' d\theta' = a\sin\theta' d\theta'$$

met a een constante (uniforme verdeling). Het aantal deeltjes in een dergelijke infinitesimale hoek wordt gegeven door $dN = N\, dP$.



1. Bepaal P(θ) in het labostelsel S en schets de kromme $\dfrac{dN}{d\theta}$ in de klassieke limiet (polaire coördinaten). Hoe evolueert deze kromme voor groter wordende β? (hint: bepaal eerst een uitdrukking voor P(θ) en dan kan je een eenvoudige uitdrukking vinden die cosθ' uitdrukt in tanθ.)
2. Stel dat door de schok bij de botsing 2 *supplementaire* deeltjes gecreëerd worden, identiek aan de oorspronkelijke deeltjes. Wat is in het MM-stelsel S' de drempelenergie voor deze reactie? Wat is de minimumsnelheid die deeltje 1 moet hebben in het labostelsel S om deze reactie te realiseren. (hint: bepaal eerst deze minimumsnelheid in S').

- Een vlakke Roberston-Walker ruimtetijd heeft lijnelement $ds^2 = [a(t)]^2\,[dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)]$.
  1) Toon aan dat een waarnemer op constante (r, θ, φ) een geodeet volgt en vind de relatie tussen de coördinatentijd t en de eigentijd gemeten door de waarnemer.
  hint: Je kan veel rekenwerk vermijden door systematiek te werk te gaan. Als je correct werkt, hoef je maximaal 4 Γ's te berekenen.
  2) Toon aan dat de *co-variante* componenten van het 4-mpment voor een deeltje met massa m dat vooruit beweegt langs een radiale baan voldoen aan $P_r = q$, $P_\theta = P_\varphi = 0$ en $P_t = \sqrt{q^2 + m^2a^2}$ met q een constante.
  Hint: bedenk dat $u.v = g_{\mu\nu}u^\mu v^\nu$.

- Een voorwerp vertrekt uit rust op $t=0$ en heeft een constante versnelling a langs de *x-as*. Dit betekent dat in het assenstelsel S' dat ogenblikkelijk in rust is t.o.v. het voorwerp, de versnelling a is. Gebruik de transformatieformules (i.h.b. de snelheids- en Lorentztransformaties) tussen S en S' om aan te tonen dat de beweging hyperbolisch is: $x^2 - c^2t^2 = \dfrac{c^4}{a^2}$.

- Een deeltje beweegt in een Schwarzschildmetriek in radiale richting van het centrum weg. Het vertrekt op een afstand $r_0 = 4m$ met een zekere beginsnelheid $v_0 = (dr/dt)_{t=0}$ en keert bij $r = 20m$ terug. Bereken de beginsnelheid gebruik makend van de nulde geodetische vergelijking en van de uitdrukking voor het lijnelement.

- Beschouw een horizontale worpvan een puntmassa in een homogeen gravitatieveld. De gravitatiekracht is gegeven door

$$\overline{F} = \gamma m g \overline{e}_x \quad \left(\begin{array}{l} m = rustmassa, g = constante, \gamma = \left(1 - \dfrac{w^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \\ \overline{w} = snelheidsvector op een willekeurig ogenblik \end{array} \right).$$

$\overline{w}$ heeft u en v als x- en y- componenten.
Beginvoorwaarden: op $t = 0$ is $x = y = 0$ en $u = 0$, $v = v_0 \neq 0$.
Bereken beide snelheidscomponenten als functies van de tijd, gebruik makende van de methodes van de speciale relativiteitstheorie.

- Onderstel dat een sterrenkundige in rust rondom zich een isotrope verdeling van in totaal N_0 sterren ziet. De sterdistributiefunctie wordt gedefinieerd als het aantal zichtbare sterren in een bepaalde ruimtehoek:

$$dN = P(\theta, \phi) d\Omega$$

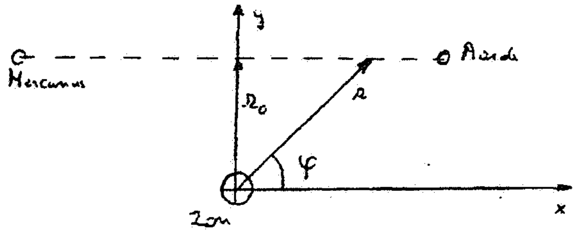
1. bereken $P(\theta, \phi)$ voor die sterrenkundige in rust.
2. Bereken $P(\theta', \phi')$ voor een sterrenkundige die voortbeweegt met snelheid v. hij ziet eenzelfde ster nu onder een andere ruimtehoek $d\Omega'$ zodat:

$$dN = P(\theta', \phi') d\Omega'$$

Hint: druk $\cos\theta$ uit i.f.v. $\cos\theta'$

3. Controleer je resultaat door na te gaan dat de bewegende sterrenkundige hetzelfde totaal aantal sterren rondom zich ziet.
4. Definieer de hoek $\theta_{\frac{1}{2}}$ door te stellen dat de waarnemer in het gebied $0 \leq \theta \leq \theta_{\frac{1}{2}}, 0 \leq \phi \leq 2\pi$ de helft van de sterren ziet. Bereken $\theta_{\frac{1}{2}}$ voor de waarnemer in rust en $\theta'_{\frac{1}{2}}$ voor de bewegende waarnemer. Wat besluit je uit je resultaat?

- Beschouw de volgende situatie: een lichtstraal wordt verstuurd vanop Aarde naar Mercurius. Het pad van het foton kan benaderd worden door een rechte parallel aan de x-as.



Bepaal de tijd (t.o.v. een waarnemer op oneindig) die het licht erover doet om Mercurius te bereiken.
Hint: druk ϕ uit i.f.v. r en r_0. Ontwikkel in machten van m en behoud termen lineair in m.

- Een deeltje met lading q beweegt in een homogeen elektrisch veld $\vec{E}=E\vec{e}_y$. Het vertrekt op t=0 in de oorsprong met een beginsnelheid $u_0\vec{e}_x$ De x- en y-componenten van de snelheidsvector $\vec{w}$ worden voorgesteld door u en v.

  1. Bepaal de coördinaten van het deeltje in functie van t.
  2. Onderzoek aan de hand van de bekomen uitdrukkingen hoe de klassieke limiet kan verkregen worden. Maak gebruik van de afkorting $\gamma = 1/\sqrt{1-\frac{w^2}{c^2}}$ en voer eventueel ook andere gepaste afkortingen in, nl. $s \equiv \frac{ht}{c}$ $\quad h \equiv \frac{qE}{m\gamma_0}$.

- Opmerking vooraf: Uit (7.271) volgt $\frac{d\varphi}{dt}=\frac{K(1-\frac{rm}{r})}{r^2}$ *met* $K = const.$ (zie blz. 215)
  Een radarsignaal wordt vanop de aarde A rakelings langs de zon gestuurd. Het weerkaatst aan een planeet P. De looptijd ondergaat een vertraging tengevolge van het zwaarteveld van de zon. Bereken deze vertraging onder verwaarlozing van de baankromming. Er wordt uitdrukkelijk gevraagd gebruik te maken van bovenstaande formule en niet van de uitdrukking voor ds^2.
  Maak eventueel ook gebruik van zinvolle benaderingen.
  Hint: bepaal de integratieconstante K door benaderende bepaling van de lichtsnelheid.