EXAMEN WAARSCHIJNLIJKHEIDSREKENING EN STATISTIEK

academiejaar 2001-2002, 6 september 2002

---

1. Geef de definitie van een homogene Markov-keten en van de transitiematrix. Formuleer en bewijs voor dergelijke keten de vergelijking van Markov.

2. Geef de definitie van de empirische distributiefunctie $F_n(x)$ van een enkelvoudige random steekproef $X_1, X_2, \ldots, X_n$ getrokken uit een populatie met distributiefunctie $F_X(x)$. Bewijs dat $\forall x \in \mathbb{R} : F_n(x) \xrightarrow{P} F_X(x)$.

3. Leg uit hoe men met

   a) de maximum-kansmethode

   b) de momentenmethode

   puntschatters van een parameter construeert.

4. Zij A en B twee toevalsverschijnselen waarvoor geldt dat $\mathcal{P}(A|B) = \mathcal{P}(B|A)$, $\mathcal{P}(A \cup B) = 1$ en $\mathcal{P}(A \cap B) > 0$. Bewijs dat $\mathcal{P}(A) > 1/2$.

5. Twee spelers A en B werpen ieder twee onvervalste dobbelstenen. Wat is de kans dat speler A een hogere som gooit dan speler B? kans op hetzelfde [illegible]

6. Zij (X, Y) een toevalsvector met probabiliteitsdichtheid $f_{X,Y}$ gegeven door:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1 - \lambda(2x-1)(2y-1) & \text{als } 0 \leq x \leq 1 \text{ en } 0 \leq y \leq 1\,, \\ 0 & \text{voor de overige } x \text{ en } y\,, \end{cases}$$

   met λ een reële parameter en $\lambda \in [0, 1]$.

   - Bepaal de marginale dichtheidsfuncties f_X en f_Y van resp. X en Y. Welke bekende verdeling hebben X en Y afzonderlijk?
   - Voor welke waarden van λ zijn X en Y onafhankelijk?

7. Zij $X_1, X_2, \ldots, X_{500}$ een onafhankelijke steekproef van omvang $n = 500$ getrokken uit een populatie X die exponentieel verdeeld is met parameter $\lambda = 1$, i.e.: $X_j \stackrel{d}{=} E(1)$ voor alle j. Bepaal bij benadering de volgende kans:

$$P\left\{ \sum_{j=1}^{500} X_j^2 \leq 1100 \right\}.$$