

1ste kandidatuur Informatica – groep 2

Examen Discrete Wiskunde – Theorie

Academiejaar 2001-2002 – 2de examenperiode

1. Geef de definitie van een aftelbare verzameling. Bewijs dat de verzameling  $\mathbb{Q}$  aftelbaar is en dat  $\mathbb{R}$  niet aftelbaar is.
2. Geef de definitie van de Euler functie  $\Phi$  en bewijs de formule voor  $\Phi(n)$ . Bewijs dat

$$\sum_{d|n} \Phi(d) = n.$$

- ~~3.~~ Wanneer is  $-1$  een kwadraat in  $\mathbb{F}_q$  (+ bewijs).  
*Bewijs dat  $\mathbb{F}_q$ , + elementair abels is en dat  $\mathbb{F}_q$  cyclisch is voor eindige veld  $\mathbb{F}_q$ .*
4. Leg het algoritme van Kruskal uit voor het verbindingsprobleem in een gewogen graaf en bewijs de correctheid van dit algoritme. Bespreek eveneens de cykeltest en het algoritme van Prim.

Oefeningen

1. Toon aan dat het berekenen van  $5^{951} \pmod{119}$  te herleiden valt tot het oplossen van het stelsel

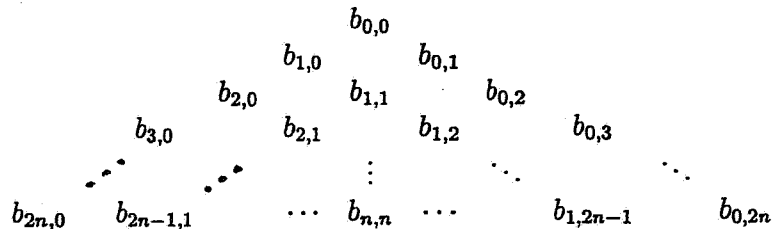
$$\begin{cases} X \equiv 6 \pmod{7} \\ X \equiv 10 \pmod{17} \end{cases}$$

en bereken  $5^{951} \pmod{119}$ .

2. Beschouw de recurrente betrekking

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} \quad (n \geq 2), \quad a_0 = 2, \quad a_1 = 4 \quad (1)$$

en de driehoekige getallentabel



waarbij  $b_{0,k} = a_k = b_{k,0}$ , voor alle  $k \in \mathbb{N}$ , en  $b_{i,j} = b_{i-1,j} + b_{i,j-1}$ , voor alle  $i, j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Noem  $s_n$  de som van de getallen in rij  $n$ , dus

$$s_n = \sum_{i=0}^n b_{i,n-i}.$$

- (a) Bewijs dat  $s_n$  voldoet aan de recurrente betrekking

$$s_n = 2s_{n-1} + 2^{n+1} \quad (n \geq 1), \quad s_0 = 2. \quad (2)$$

- (b) Los de recurrente betrekking van  $s_n$  op.

3. Stel de Zech log-tabel op voor  $\mathbb{F}_8$ , in de veronderstelling dat  $\mathbb{F}_8$  geconstrueerd werd met behulp van de irreduciebele veelterm  $t^3 + t + 1$ , en bepaal de oplossingen van de kwadratische vergelijking  $(t^2 + 1)x^2 + (t + 1)x + t = 0$ .
4. Bewijs dat elke deelverzameling  $X$  van  $\mathbb{N}[1, 2n]$ , met  $|X| \geq n + 1$ , steeds twee elementen bevat, zodat het ene een deler is van het andere, en zodat hun quotient een macht van 2 is.