1ste kandidatuur Informatica – groep 2

Examen Discrete Wiskunde – Theorie

Academiejaar 2001-2002 – 2de examenperiode

1. Geef de definitie van een aftelbare verzameling. Bewijs dat de verzameling $\mathbb{Q}$ aftelbaar is en dat $\mathbb{R}$ niet aftelbaar is.

2. Geef de definitie van de Euler functie Φ en bewijs de formule voor $\Phi(n)$. Bewijs dat
$$\sum_{d|n} \Phi(d) = n.$$

3. Wanneer is -1 een kwadraat in $\mathbb{F}_q$ (+ bewijs).
Bewijs dat $\mathbb{F}_{q},+$ elementair abels is en dat $\mathbb{F}_{q},\cdot$ cyclisch is voor eindige veld $\mathbb{F}_q$.

4. Leg het algoritme van Kruskal uit voor het verbindingenprobleem in een gewogen graaf en bewijs de correctheid van dit algoritme. Bespreek eveneens de cykeltest en het algoritme van Prim.

Examen Discrete Wiskunde, 6 september 2002

Oefeningen

1. Toon aan dat het berekenen van $5^{951} \pmod{119}$ te herleiden valt tot het oplossen van het stelsel

$$\begin{cases} X & \equiv & 6 \pmod{7} \\ X & \equiv & 10 \pmod{17} \end{cases}$$

en bereken $5^{951} \pmod{119}$.

2. Beschouw de recurrente betrekking

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}\ (n \geq 2),\ a_0 = 2,\ a_1 = 4 \tag{1}$$

en de driehoekige getallentabel

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & b_{0,0} & & & \\
 & & b_{1,0} & & b_{0,1} & & \\
 & b_{2,0} & & b_{1,1} & & b_{0,2} & \\
b_{3,0} & & b_{2,1} & & b_{1,2} & & b_{0,3} \\
\iddots & \iddots & & \vdots & & \ddots & \ddots \\
b_{2n,0} & b_{2n-1,1} & \cdots & b_{n,n} & \cdots & b_{1,2n-1} & b_{0,2n}
\end{array}$$

waarbij $b_{0,k} = a_k = b_{k,0}$, voor alle $k \in \mathbb{N}$, en $b_{i,j} = b_{i-1,j} + b_{i,j-1}$, voor alle $i, j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Noem s_n de som van de getallen in rij n, dus

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} b_{i,n-i}.$$

(a) Bewijs dat s_n voldoet aan de recurrente betrekking

$$s_n = 2s_{n-1} + 2^{n+1}\ (n \geq 1),\ s_0 = 2. \tag{2}$$

(b) Los de recurrente betrekking van s_n op.

3. Stel de Zech log-tabel op voor $\mathbb{F}_8$, in de veronderstelling dat $\mathbb{F}_8$ geconstrueerd werd met behulp van de irreduciebele veelterm $t^3 + t + 1$, en bepaal de oplossingen van de kwadratische vergelijking $(t^2+1)x^2 + (t+1)x + t = 0$.

4. Bewijs dat elke deelverzameling X van $\mathbb{N}[1, 2n]$, met $|X| \geq n+1$, steeds twee elementen bevat, zodat het ene een deler is van het andere, en zodat hun quotient een macht van 2 is.