Numerieke Analyse 2002–2003. Eerste examenperiode.

OEFENINGEN

1. Gegeven zijn twee van nul verschillende vectoren $u, v \in \mathbb{R}^n$ met $\langle u, v\rangle = 0$. Beschouw de matrix $A = uv^T + vu^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, en bereken $\|A\|_2$ (m.a.w. stel een uitdrukking op voor $\|A\|_2$ waarin normen van u en v optreden). Beschouw vervolgens $B = puv^T + qvu^T$ (met $p, q \in \mathbb{R}$), en bereken $\|B\|_2$.

2. Zij $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ met $a_{i,j} = 0$ als $i - j > 2$. Deze speciale vorm van zo'n matrix wordt geïllustreerd voor $n = 6$:

$$A = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \end{pmatrix}.$$

   a) Neem aan dat A een rechtstreekse LU-factorisatie bezit (m.a.w. dat de pivot-elementen nooit nul worden). Herschrijf het **Algoritme** *LU-factorisatie* voor zulke speciale matrices, zodanig dat er geen overbodige berekeningen worden uitgevoerd (m.a.w. hou rekening met de posities waar reeds een nulelement staat). Geef ook enige uitleg of verantwoording voor je aanpassingen van het algoritme.

   b) Hoeveel elementaire rekenkundige bewerkingen vereist deze factorisatie?

3. Stel dat $f(x)$ een monisch polynoom is van graad $2n + 2$, en $H(x)$ de Hermite-interpolatieveelterm door de punten $(x_i, f(x_i))$, $i = 1, \ldots, n$ (zoals steeds zijn de x_i's onderling verschillend; en bovendien is $x_i \neq 0$ voor elke i). Als $f(0) - H(0) = 0$, en $f'(0) - H'(0) = 1$, bepaal dan alle snijpunten van $f(x)$ en $H(x)$.

4. Beschouw de volgende kwadratuurformule (voor functies f die voldoende afleidbaar zijn):

$$\int_0^2 f(x)dx \approx I(f) = Af(1) + Bf''(1).$$

   a) Bepaal de coëfficiënten A en B zodat de GVAN zo hoog mogelijk wordt. Wat is de GVAN?

   b) Bereken de Peano-kern $K(t)$ voor de aldus bekomen kwadratuurformule.

   c) Ga na of $K(t)$ een vast teken heeft in $[0, 2]$, en zo ja, stel dan een expliciete uitdrukking op voor de procesfout van de kwadratuurformule.

Numerieke Analyse 2002–2003. Eerste examenperiode.

THEORIE

1. Onderstel dat alle eigenwaarden λ_μ van een complexe matrix C voldoen aan $|\lambda_\mu| < 1$. De Jordan-normaalvorm van C heeft de volgende gedaante :

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_m \end{pmatrix}$$

met

$$J_\mu = \begin{pmatrix} \lambda_\mu & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_\mu & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \lambda_\mu & 1 \\ & & & & \lambda_\mu \end{pmatrix}.$$

Zij m_μ de multipliciteit van λ_μ. Vermits $J_\mu = \lambda_\mu I + S$, met

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix},$$

is

$$J_\mu^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda_\mu^{k-j} S^j = \sum_{j=0}^{m_\mu - 1} \binom{k}{j} \lambda_\mu^{k-j} S^j , \qquad (*)$$

want $S^{m_\mu} = 0$. Nu geldt $\left|\binom{k}{j}\lambda_\mu^{k-j}\right| \leq \frac{1}{j!}\left|k^j \lambda_\mu^{k-j}\right|$, en vermits $|\lambda_\mu| < 1$ geldt

$$\lim_{k\to\infty} \binom{k}{j} \lambda_\mu^{k-j} = 0 ,$$

dus $J_\mu^k \to 0$ en $\lim_{k\to\infty} J^k = 0$.

- Waarom is $S^{m_\mu} = 0$? Wat stelt 0 voor?
- In de eerste gelijkheid in (*) past men de binomiaalregel toe op $(A+B)^k = \sum_j \binom{k}{j} A^{k-j} B^j$. Is dit steeds geldig voor vierkante matrices? Leg uit.
- Is het nodig om in (*) over te gaan van k naar $m_\mu - 1$ als sommatiegrens? Waarom?
- Waarom gaat $\lim_{k\to\infty} \binom{k}{j}\lambda_\mu^{k-j}$ naar nul?
- Welke eigenschap wordt in het bovenstaande stukje theorie bewezen?

2. Zij $P(x) = a_0 x^n + \cdots + a_n$ ($a_0 \neq 0$) een reële veelterm van graad n. De rij

$$P(x) = P_0(x), P_1(x), \ldots, P_m(x)$$

van reële veeltermen is een *Sturm-rij* voor $P(x)$ als aan de volgende voorwaarden voldaan is :

(a) alle reële wortels van $P_0(x)$ zijn enkelvoudig;

(b) $\operatorname{sgn} P_1(\xi) = -\operatorname{sgn} P_0'(\xi)$ als ξ een reële wortel van P_0 is;

(c) voor $i = 1, 2, \ldots, m-1$ geldt $P_{i+1}(\xi)P_{i-1}(\xi) < 0$ als ξ een reële wortel van P_i is;

(d) $P_m(x)$ heeft geen reële wortels.

Voor $t \in \mathbb{R}$ beschouwen we de rij waarden $P_0(t), P_1(t), \ldots P_m(t)$, en definiëren $w(t) \in \mathbb{N}$ als het aantal tekenveranderingen in deze rij (als $P_i(t) = 0$ verwijderen we dit element uit de rij vooraleer we de tekenveranderingen tellen).

Onderstel dat $a \in \mathbb{R}$ een wortel is van $P_i(x)$, met $i > 0$, en neem aan dat P_i van teken verandert in a. Voor voldoende kleine $h > 0$ ziet het gedrag van P_j $(j = i-1, i, i+1)$ er als volgt uit in de omgeving van a :

	$a-h$	a	$a+h$
$i-1$	$-$	$-$	$-$
i	$-$	0	$+$
$i+1$	$+$	$+$	$+$

	$a-h$	a	$a+h$
$i-1$	$+$	$+$	$+$
i	$-$	0	$+$
$i+1$	$-$	$-$	$-$

	$a-h$	a	$a+h$
$i-1$	$-$	$-$	$-$
i	$+$	0	$-$
$i+1$	$+$	$+$	$+$

	$a-h$	a	$a+h$
$i-1$	$+$	$+$	$+$
i	$+$	0	$-$
$i+1$	$-$	$-$	$-$

- Waarom geldt $w(a-h) = w(a) = w(a+h)$?
- Stel nu dat $a \in \mathbb{R}$ een wortel is van $P_i(x)$, met $i > 0$, en neem aan dat P_i positief is in de omgeving van a. Beschrijf (met tabellen) het gedrag van P_j $(j = i-1, i, i+1)$ in de omgeving van a.
- Stel dat $P_0(x)$ N reële wortels heeft. Wat kan je zeggen over het aantal reële wortels van $P_1(x)$?
- Stel dat $\xi_1, \ldots, \xi_k$ de reële wortels van $P_{m-1}(x)$ zijn. Beschrijf het gedrag van het teken van $P_{m-2}(\xi_i)$ $(i = 1, \ldots, k)$.
- Onderstel dat $P = P_0, P_1, \ldots, P_5$ een Sturm-rij is met $P_k(-\infty) = +\infty$ voor elke k, en de volgende tabel geeft hun verloop in een aantal punten (0 als de waarde 0 is, en het teken als de waarde verschillend van 0 is) :

	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
0	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
1	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
2	0	$+$	0	$-$	0	$+$
3	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
4	$+$	$-$	0	$+$	$-$	$+$
5	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

Hoeveel nulpunten van P bevatten de volgende intervallen :

$$[0,1] \quad [0,2] \quad]2,4[\quad]3,5[$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

3. Zij $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n\}$ de verzameling orthonormale veeltermen in het interval $[a, b]$ t.o.v. de gewichtsfunctie $w(x)$. Stel door A_k de hoogstegraadscoëfficiënt van $\phi_k(x)$ voor. Uit de recursierelatie voor orthogonale veeltermen volgt dat de polynomen $\frac{(-1)^k}{A_k}\phi_k(x)$ samenvallen met de karakteristieke veeltermen van een tridiagonale symmetrische matrix, i.e.

$$\frac{(-1)^k}{A_k}\phi_k(x) = p_k(x) = \det \begin{pmatrix} \alpha_1 - x & \beta_2 & & \\ \beta_2 & \alpha_2 - x & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \beta_k \\ & & \beta_k & \alpha_k - x \end{pmatrix}, \tag{1}$$

met $\beta_i \neq 0$. De eigenschappen van de polynomen $p_k(x)$ werden uitvoerig besproken (cfr. Sturm-rijen). In het bijzonder zijn hun wortels reëel en enkelvoudig; en bijgevolg geldt dit ook voor de wortels van $\phi_n(x)$. Als x_k een wortel van $\phi_n(x)$ is, geldt bovendien

$$\int_a^b \frac{\phi_n(x)^2}{(x-x_k)} w(x)dx = \int_a^b \phi_n(x)(\sum_{j=0}^{n-1} c_j\phi_j(x))w(x)dx = 0, \tag{2}$$

dus moet $a < x_k < b$. Een andere belangrijke identiteit (Christoffel-Darboux) voor de polynomen $\phi_k(x)$ is $(x \neq y)$

$$\sum_{r=0}^{n-1} \phi_r(x)\phi_r(y) = \frac{A_{n-1}}{A_n}\frac{\phi_n(x)\phi_{n-1}(y) - \phi_n(y)\phi_{n-1}(x)}{x-y}. \tag{3}$$

- Leid uit (1) een recursiebetrekking af voor de polynomen $p_k(x)$.
- Verklaar de gelijkheid van de twee integralen in (2).
- Waarom mag men uit (2) besluiten dat $a < x_k < b$?
- Leid uit (3) een uitdrukking af voor $\sum_{r=0}^{n-1} \phi_r(x)^2$.
- Stel $y = x_k$ (met x_k een wortel van $\phi_n(x)$) in (3). Door vervolgens met de gepaste uitdrukking te vermenigvuldigen, en te integreren, leid hieruit een uitdrukking af voor

$$\int_a^b \frac{w(x)\phi_n(x)\phi_{n-1}(x)}{(x-x_k)} dx.$$

4. Meervoudige-stapmethoden voor het beginwaardeprobleem

$$y' = f(t,y) \qquad a \leq t \leq b \qquad y(a) = \alpha$$

worden dikwijls afgeleid door de vergelijking te integreren over een interval $[x, x+k] \subset [a,b]$:

$$y(x+k) = y(x) + \int_x^{x+k} f(t, y(t))dt. \tag{1}$$

Bij de Adams-formules maakt men gebruik van de Newton-achterwaartse-interpolatieveelterm voor $f(t, y(t))$ door de punten $t_{p-q}, \ldots, t_{p-1}, t_p$,

$$f(t,y(t)) = \sum_{m=0}^{q} (-1)^m \binom{-s}{m} \nabla^m f(t_p, y(t_p)) + (-1)^{q+1}\binom{-s}{q+1} h^{q+1} y^{(q+2)}(\xi). \tag{2}$$

Hierin is $s = (t - t_p)/h$, en nemen we aan dat $y(t)$ minstens $(q+2)$ keer continu-afleidbaar is. Voor de Adams-Bashforth-methode kiest men $[x, x+k] = [t_p, t_{p+1}]$, en dan volgt er :

$$y(t_{p+1}) - y(t_p) = h \sum_{m=0}^{q} \gamma_m \nabla^m f(t_p, y(t_p)) + R_q^{AB}, \tag{3}$$

met

$$\gamma_m = (-1)^m \frac{1}{h} \int_{t_p}^{t_{p+1}} \binom{-s}{m} dt = (-1)^m \int_0^1 \binom{-s}{m} ds \tag{4}$$

en

$$R_q^{AB} = (-1)^{q+1} h^{q+1} \int_{t_p}^{t_{p+1}} \binom{-s}{q+1} y^{(q+2)}(\xi) dt. \tag{5}$$

De coëfficiënten γ_m kunnen rechtstreeks berekend worden uit (4), of m.b.v. genererende functies. De Adams-Bashforth-formules kunnen dan als volgt geschreven worden :

$$\begin{aligned} y_{p+1} - y_p &= h \sum_{m=0}^{q} \gamma_m \sum_{\rho=0}^{m} (-1)^\rho \binom{m}{\rho} f_{p-\rho} & (6) \\ &= h \sum_{\rho=0}^{q} \beta_{q\rho} f_{p-\rho}\,, & (7) \end{aligned}$$

waarbij de β-coëfficiënten uit de γ's volgen. Voor de foutterm R_q^{AB} kunnen we schrijven :

$$R_q^{AB} = (-1)^{(q+1)} h^{q+1} y^{(q+2)}(\eta) \int_{t_p}^{t_{p+1}} \binom{-s}{q+1} dt = h^{q+2} y^{(q+2)}(\eta) \gamma_{q+1}\,, \qquad (8)$$

met γ_{q+1} gedefinieerd in (4), en $t_{p-q} < \eta < t_{p+1}$.

- Verklaar de overgang van (3) naar (6). Waarvoor staat $f_{p-\rho}$ in (6)?
- Verklaar de stap van (6) naar (7). Geef een uitdrukking voor $\beta_{q\rho}$.
- Waarop steunt de overgang van (5) naar (8)?
- Als $q = 3$, tot welke m-voudige-stapmethode geeft deze techniek aanleiding? (m.a.w. specificeer : impliciet of expliciet, waarde van m?)

5. Tenslotte nog enkele vragen uit verschillende hoofdstukken.

- Voor een positief reëel getal x geldt $x = (0.d_{-1}d_{-2}d_{-3}d_{-4}\ldots)_2$ (in basis 2) en in basis 4 : $x = (0.b_{-1}b_{-2}b_{-3}b_{-4}\ldots)_4$. Geef het verband tussen b_{-i} en d_{-i}.
- Is de volgende bewering waar of vals : als $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch is, dan geldt $\|A\|_2 = \rho(A)$. Leg uit.
- Kan je een functie $f(x)$ geven zodanig dat de Newton-Raphson-methode naar het uniek nulpunt ξ convergeert voor elke startwaarde $x_0 \in \mathbb{R}$, en wel zodanig dat de convergentie lineair is voor elke $x_0 \neq \xi$?
- Is de volgende bewering waar of vals (en leg uit) : Zij A een reële en symmetrische matrix. De methode van Jacobi voor de benadering van eigenwaarden van A is convergent als en slechts als A niet-singulier is.
- Is de volgende bewering waar of vals (en leg uit) : voor een reële symmetrische matrix is de som van de kwadraten van de matrixelementen gelijk aan de som van de kwadraten van de eigenwaarden.
- Kan $\max_{x\in[-1,1]} |p_n(x)|$ kleiner zijn dan $\frac{1}{2^{n-1}}$ voor $p_n(x)$ een veelterm van graad n? Verklaar je nader.
- Als $T(m)$ de samengestelde trapeziumregel voorstelt voor de kwadratuur van $\int_a^b f(x)dx$, hoeveel functie-evaluaties moeten er dan gebeuren? Als er vervolgens een ontdubbeling van de deelintervallen gebeurt om $T(2m)$ te bepalen, hoeveel nieuwe functie-evaluaties moeten er dan berekend worden?