TWEEDE KAN WISKUNDE | DINSDAG 17 JUNI 2003

VOORMIDDAG, 8u30 | EERSTE ZITTIJD

Examen Theorie Projectieve Meetkunde

1. Geef de fundamentaalstelling voor collineaties van $PG(V)$ naar $PG(V)$, met V een vectorruimte waarvoor $\mathrm{d}(V) > 2$.
2. Beschrijf het dualiteitsprincipe in projectieve ruimten. Geef de formulering van de stelling van Pappus en de formulering van de duale stelling van Pappus.
3. Bewijs de stelling: Is K de kern van het zwak quasiveld $(Q, +, .)$, dan is $(K, +, .)$ een lichaam.
4. Bewijs de stelling: Is (R, T) een planaire ternaire ring, dan $(R_0, .)$ een loop met neutraal element 1.

TWEEDE KAN WISKUNDE MAANDAG 16 JUNI 2003

VOORMIDDAG, 8u30 EERSTE ZITTIJD

Examen Oefeningen Projectieve Meetkunde

1. (a) Een m-spread van de projectieve ruimte $\mathrm{PG}(n,q), 0 \leq m \leq n$, is een verzameling S van m-dimensionale deelruimten van $\mathrm{PG}(n,q)$ zodanig dat elk punt van $\mathrm{PG}(n,q)$ in precies 1 element van S ligt. Bereken het aantal elementen van een m-spread in $\mathrm{PG}(n,q)$ en bewijs dat, indien $\mathrm{PG}(n,q)$ een m-spread heeft, dan $m+1$ een deler is van $n+1$.

   (b) Zij U een hypervlak van de projectieve ruimte $\mathrm{PG}(4,q)$, en zij S een 1-spread van U. Stel $P = P_1 \cup P_2$, waarbij P_1 de verzameling is van alle punten van $\mathrm{PG}(4,q)$ die niet in U liggen, en waarbij $P_2 = S$. Stel verder $B = B_1 \cup \{(\infty)\}$, waarbij B_1 de verzameling is van alle vlakken van $\mathrm{PG}(4,q)$ die niet in U liggen, maar die U snijden in een element van S, en waarbij (∞) een abstract element "oneindig" is. Tot slot definiëren we een incidentierelatie $\mathrm{I} \subseteq P \times B$ als volgt.

   - Als $p \in P_1$ en $\pi \in B_1$ dan geldt $(p,\pi) \in \mathrm{I}$ als en slechts als $p \in \pi$ (gezien als punt en vlak van $\mathrm{PG}(4,q)$).
   - Als $p \in P_1$ dan geldt $(p,(\infty)) \notin \mathrm{I}$.
   - Als $L \in P_2$ en $\pi \in B_1$ dan geldt $(L,\pi) \in \mathrm{I}$ als en slechts als $L \subseteq \pi$ (gezien als rechte en vlak van $\mathrm{PG}(4,q)$).
   - Als $L \in P_2$ dan geldt $(L,(\infty)) \in \mathrm{I}$.

   Bewijs dat $\mathcal{P} = (P,B,\mathrm{I})$ een (axiomatisch) projectief vlak is. Wat is de orde van dit vlak?

2. Beschouw in het projectief vlak $\mathrm{PG}(2,q)$ de volgende bundel kegelsneden:

$$\mathcal{C}_m : X_0^2 + 4X_1^2 + mX_1X_2 + X_0X_2 + 5X_0X_1 = 0, \quad \forall m \in \mathrm{GF}(q).$$

   (a) Hoeveel kegelsneden van deze bundel zijn absoluut reducibel, hoeveel zijn reducibel? (Bespreek in functie van q.)

   (b) Bepaal de componenten van de reducibele kegelsneden uit deze bundel.

   (c) Geef alle basispunten van de bundel. (Een basispunt is een punt dat tot elke kegelsnede uit de bundel behoort.)

VERGEET NIET JE NAAM TE VERMELDEN OP ELK BLAD!
SUCCES!