# Examen Analyse II – Tweede zittijd 2002–2003
# Eerste Kandidatuur Wiskunde en Natuurkunde
# Theorie

## Deel 1

**Vraag 1.**
Formuleer en bewijs de kettingregel voor de samenstelling $F := g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ van een functie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ en een functie $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$.

Pas deze kettingregel toe om de relatie te bepalen tussen de normaalvectoren geassocieerd met twee equivalente parametervoorstellingen $(D, \varphi)$ en $(E, \psi)$ van een glad oppervlak $\Sigma$.

**Vraag 2.**
Formuleer (zonder bewijs) de stelling van Green.
Formuleer en bewijs de stelling van Stokes.
Wat is het verband tussen deze beide stellingen?

## Deel 2

(Op afzonderlijk blad afgeven a.u.b.)

**Vraag 3.**

(i) Definieer *meetbare functie.*

(ii) Definieer *simpele afbeelding.*

(iii) Vul aan en bewijs:
*elke … meetbare afbeelding is de limiet van een … simpele afbeeldingen.*

# Oefeningen Analyse II, augustus 2003

**Oefening 1.** Onderzoek of het vectorveld

$$\mathbf{F} = \left( \frac{1-\ln(xy)}{x^2y^2}, \frac{1-2\ln(xy)}{xy^3} \right)$$

conservatief is; bepaal desgevallend zijn scalaire potentiaal in het gepaste gebied. Bereken dan de lijnintegraal $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ langs het lijnstuk van $(1,1)$ naar $(e,e)$ ($e$ is het grondtal van de natuurlijke logaritmen).

**Oefening 2.** Hoeveel volume blijft er over van een bol met straal $a$, als er een cilindrisch gat wordt uitgeboord? Het cilindrisch gat heeft straal $b$ $(0 < b < a)$ en de as ervan gaat door het middelpunt van de bol.

**Oefening 3.** Toon aan dat $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continu is in $(0,0)$, waarbij

$$f(x,y) := \begin{cases} y \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

**Oefening 4.** Bereken de oppervlakte van de gebogen zijwanden van het cilindervormige lichaam

$$\Omega := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x \geq 0,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq ax,\ (x^2 - y^2) \geq (x^2 + y^2)^2 \right\}.$$

Hierin is $a > 0$ een constante en de kromme $(x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)^2$ is het lemniscaat van Bernoulli.