Lineaire algebra en meetkunde 1

Vraag 1

Als V_1 en V_2 eindigdimensionale deelruimten zijn van een vectorruimte V, dan zijn $V_1 \cap V_2$ en $V_1 + V_2$ ook eindigdimensionaal en er geldt

$$\dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$$

Geef een bewijs.

Vraag 2

Bewijs dat twee eindigdimensionale vectorruimten V, W over een veld K isomorf zijn als en slechts als ze dezelfde dimensie hebben, i.e. $\dim V = \dim W$.

Vraag 3

Stel dat x een willekeurige vector is in een vectorruimte V met basissen $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ en $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n\}$ zodat $x = \sum x_i e_i = \sum \bar{x}_i \bar{e}_i$. Bewijs dat er een inverteerbare matrix C bestaat waarvoor geldt

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}$$