1ste Kandidatuur Informatica
Academiejaar 2003–2004, 22 januari 2004, 8u30
Examen Analyse 1 $\sim$ praktische oefeningen

1. Zij $(\mathbb{R}, d_{a,b})$ de metrische ruimte met basisverzameling $\mathbb{R}$ en de metriek $d_{a,b}$ gedefinieerd als

$$\begin{array}{rcll} d_{a,b} & : & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to \ \mathbb{R} \ : \\ & & (x,y) & \mapsto \ 0, \quad \text{als } x = y; \\ & & (x,y) & \mapsto \ a, \quad \text{als } (\exists n \in \mathbb{Z})((x,y) \in [n, n+1[^2); \\ & & (x,y) & \mapsto \ b, \quad \text{anders}; \end{array}$$

   met a en b reële getallen zodanig dat $0 < a < b$.

   (i) Bewijs dat $d_{a,b}$ een ultrametriek is.

   (ii) Bewijs dat elke $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ afbeelding gelijkmatig continu is in $(\mathbb{R}, d_{a,b})$.

2. Gegeven de functie

$$\begin{array}{rcll} f & : & \mathbb{R} & \to \ \mathbb{R} \ : \\ & & x & \mapsto \ 2\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{(\operatorname{ch} x) - 1}\right), \quad \text{voor alle } x \in \mathbb{R}^*; \\ & & x & \mapsto \ \pi, \quad \text{als } x = 0. \end{array}$$

   (i) Geef een volledig continuïteitsonderzoek van f.

   (ii) Geef een volledig limietonderzoek van f ten opzichte van $(\overline{\mathbb{R}}, d')$.

   (iii) Bepaal de afgeleide functie van f.

3. Zij voor elke $n \in \mathbb{Z}$ de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ functie f_n met waarde in x gegeven door

$$f_n(x) = (\sin x)^{2(x - n\pi)}.$$

   (i) Bepaal de maximale definitieverzameling van f_n.

   (ii) Bereken de volgende limiet indien deze bestaat :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to n\pi} f_n(x)\right).$$

Prof. Dr. E. E. Kerre