Lineaire Algebra en Analytische Meetkunde I

Eerste Bachelor Wiskunde
Eerste Bachelor Fysica en Sterrenkunde — vrijdag, 4 februari 2005

1. Vertrekkend van elke basis $\{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n\}$ van de Euclidische vectorruimte $\mathbb{R}^n$ kan men een orthogonale basis van $\mathbb{R}^n$ construeren ($n \geq 2$). Bewijs!

2. Bewijs de stelling van Cayley-Hamilton (het bewijs van de hulpstellingen wordt niet gevraagd).

3. (a) De loodlijn uit een punt $p_0(\vec{r}_0(p_1^0, \cdots, p_n^0))$ op een hypervlak met vergelijking $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_{n+1} = 0$. De afstand van dat punt tot dat hypervlak.

   (b) Geef de definitie van een dubbelpunt van een kwadriek. Waarom ligt een dubbelpunt op de kwadriek? Welke soorten (niet-ontaarde) kwadrieken hebben een dubbelpunt?

Lineaire Algebra en Analytische Meetkunde
Examen oefeningen
1e bachelor wiskunde en natuurkunde
Academiejaar 2004–2005 — eerste examenperiode

Oefening 1. Beschouw in $\mathbb{R}^4$ de deelruimte V opgespannen door $(2,-1,0,1)$, $(1,-2,3,2)$ en $(1,0,-1,-4)$. Zoek een orthonormale basis voor V en $V^\perp$.

Oplossing. We passen Gram–Schmidt orthogonalisatie toe om een orthogonale basis te vinden voor V. Met de notaties van de cursus hebben we $\vec{v_1} = (2,-1,0,1)$, $\vec{v_2} = (1,-2,3,2)$ en $\vec{v_3} = (1,0,-1,-4)$.

$$\begin{aligned}
\vec{u_1} &= (2,-1,0,1)\\
\vec{u_2} &= (1,-2,3,2) - \frac{(1,-2,3,2)\cdot(2,-1,0,1)}{(2,-1,0,1)^2}(2,-1,0,1)\\
&= (1,-2,3,2) - \frac{6}{6}(2,-1,0,1)\\
&= (-1,-1,3,1)\\
\vec{u_3} &= (1,0,-1,-4) - \frac{(1,0,-1,-4)\cdot(2,-1,0,1)}{(2,-1,0,1)^2}(2,-1,0,1)\\
&\quad - \frac{(1,0,-1,-4)\cdot(-1,-1,3,1)}{(-1,-1,3,1)^2}(-1,-1,3,1)\\
&= (1,0,-1,-4) - \frac{-2}{6}(2,-1,0,1) - \frac{-8}{12}(-1,-1,3,1)\\
&= (1,0,-1,-4) + \frac{1}{3}(2,-1,0,1) + \frac{2}{3}(-1,-1,3,1)\\
&= (1,-1,1,-3)
\end{aligned}$$

Nu hebben we een orthogonale basis voor V: $\{(2,-1,0,1),(-1,-1,3,1),(1,-1,1,-3)\}$. $V^\perp$ is ééndimensionaal, dus moeten we nog één vector vinden die loodrecht staat op alle vectoren uit een basis voor V. Hiervoor moeten we een stelsel oplossen.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 3 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 & 0\\ -1 & -1 & 3 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 & 0\\ 0 & -2 & 4 & -2 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

De oplossingsverzameling is

$$\{(t,2t,t,0 \mid t\in\mathbb{R}\}$$

Een basis voor $V^\perp$ is dus bijvoorbeeld $\{(1,2,1,0)\}$.

Nu moeten we alle basiselementen nog normeren, zo krijgen we uiteindelijk de volgende orthonormale basis voor V:

$$\left\{\left(\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{-1}{\sqrt{6}},0,\frac{1}{\sqrt{6}}\right),\left(\frac{-1}{2\sqrt{3}},\frac{-1}{2\sqrt{3}},\frac{3}{2\sqrt{3}},\frac{1}{2\sqrt{3}}\right),\left(\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{-1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{-3}{2\sqrt{3}}\right)\right\}$$
$$=\left\{\left(\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{-\sqrt{6}}{6},0,\frac{\sqrt{6}}{6}\right),\left(\frac{-\sqrt{3}}{6},\frac{-\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{6}\right),\left(\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{-\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$$

en voor $V^{\perp}$:

$$\left\{\left(\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{2}{2\sqrt{3}},\frac{1}{2\sqrt{3}},0\right)\right\}=\left\{\left(\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{6},0\right)\right\}$$

Oefening 2. Beschouw het punt $P(2,0,-1)$ op de kwadriek K, die bepaald wordt door de vergelijking $f(x,y,z)=0$, waarbij

$$f=4x^2+y^2+z^2+2xy+4xz+4yz-9$$

Bepaal het raakvlak aan K door P en de twee beschrijvenden van K door P.

Oplossing. Om het raakvlak te bepalen, berekenen we de partiële afgeleiden van de vergelijking van de kwadriek:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=8x+2y+4z$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=2y+2x+4z$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}=2z+4x+4y$$

Het raakvlak in P wordt dan:

$$(x-2)\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(2,0,-1)+(y-0)\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(2,0,-1)+(z+1)\cdot\frac{\partial f}{\partial z}(2,0,-1)$$
$$=12(x-2)+6(z+1)=12x+6z-18=0$$

Vereenvoudigd: $2x+z-3=0$. Om de beschrijvenden te vinden, moeten we de doorsnede bepalen van K met het raakvlak. Daarvoor vervangen we z door $3-2x$ in f:

$$4x^2+y^2+(3-2x)^2+2xy+4x(3-2x)+4y(3-2x)-9=0$$
$$y^2-6xy+12y=0$$
$$y(y-6x+12)=0$$

De twee beschrijvenden door P zijn dus

$$\begin{cases}2x+z-3=0\\ y=0\end{cases}\qquad\begin{cases}2x+z-3=0\\ y-6x+12=0\end{cases}$$

Oefening 3. Een reële vierkante matrix A wordt *nilpotent* genoemd als er een natuurlijk getal n bestaat waarvoor $A^n = 0$. Een voorbeeld is $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, want $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Bewijs dat een reële vierkante matrix nilpotent is als en slechts als die matrix enkel 0 als eigenwaarde heeft (en geen andere reële noch complexe eigenwaarden).

Oplossing. Als we gebruik maken van de stelling van Cayley–Hamilton, is deze oefening zeer eenvoudig: de karakteristieke vergelijking van een matrix met enkel nul als eigenwaarden is gelijk aan $k_A(x) = x^n$. Nu zegt Cayley–Hamilton dat $k_A(A) = A^n = 0$, en het is al bewezen.

We geven ook een bewijs dat geen gebruik maakt van deze stelling, we beginnen met de gemakkelijke richting: Stel dat A nilpotent is, dat dus $A^n = 0$. Voor een eigenvector $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ bij een eigenwaarde λ krijgen we

$$0 = A^n \overrightarrow{v} = A^{n-1}(A\overrightarrow{v}) = A^{n-1}\lambda\overrightarrow{v} = \cdots = \lambda^n \overrightarrow{v}$$

Aangezien we $\overrightarrow{v}$ verschillend van $\overrightarrow{0}$ gekozen hebben, moet dan wel λ gelijk zijn aan 0.

Omgekeerd, stel dat A enkel 0 als eigenwaarde heeft. We weten uit de cursus dat er altijd een basisovergang $\bar{A} = C^{-1}AC$ bestaat zodat $\bar{A}$ een driehoeksmatrix is. Bij zo'n matrix zijn de diagonaalelementen juist de eigenwaarden, in ons geval dus allemaal nullen. De matrix $\bar{A}$ heeft de volgende vorm:

$$\begin{pmatrix} 0 & * & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Als we zo'n matrix met zichzelf vermenigvuldigen (we rekenen dus $\bar{A}^2$ uit), komt er een diagonaal nullen bij, we krijgen iets van de vorm

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Telkens we vermenigvuldigen met $\bar{A}$ komen er nullen bij, zo zien we dat uiteindelijk $\bar{A}^n = 0$. Aangezien $A = C\bar{A}C^{-1}$, zal $A^n = C\bar{A}^nC^{-1} = 0$, met andere woorden: A is dus nilpotent.