Lineaire Algebra en Analytische Meetkunde
Examen oefeningen
1e bachelor wiskunde / 1e bachelor fysica
Academiejaar 2004–2005 — tweede examenperiode

Oefening 1. Bepaal de eigenwaarden (reëel en complex) en eigenruimten van onderstaande matrix. Diagonalizeer deze matrix indien mogelijk (geef de formule en matrices voor de basisovergang).

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Oplossing. Noem de gegeven matrix A. De karakteristieke vergelijking is

$$k_A(\lambda) = -\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda = \lambda(\lambda-3)^2$$

We vinden 2 eigenwaarden: 0 (met multipliciteit 1) en 3 (met multipliciteit 2).

Eigenruimte bij $\lambda = 0$. Om de eigenruimte te bepalen, lossen we de vergelijking $(A - \lambda I_3)X = 0$ op, voor $\lambda = 0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

we krijgen dus als eigenruimte

$$W_0 = \{(r, -r, r) \mid r \in \mathbb{R}\}$$

Eigenruimte bij $\lambda = 3$. We moeten de vergelijking $(A - 3I_3)X = 0$ oplossen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

We vinden de eigenruimte

$$W_3 = \{(s - r, s, r) \mid r, s \in \mathbb{R}\}$$

Diagonalizeren van A. Aangezien de multipliciteiten van de eigenwaarden overeenkomen met de dimensies van de eigenruimten, is A diagonalizeerbaar. Als basis van eigenvectoren nemen we $\{(1,-1,1), (-1,0,1), (1,1,0)\}$. Dan is dus

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = C^{-1}AC$$

Oefening 2. Bespreek onderstaand stelsel over $\mathbb{R}$ in functie van de parameter a. Geef in een tabel een samenvatting van de verschillende gevallen en de bijhorende oplossingen.

$$\begin{cases} x + (a+1)z = 1 \\ ax + ay + a^2 z = a^3 \\ (a-1)x + ay - z = a - 1 \end{cases}$$

Oplossing.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a+1 & 1 \\ a & a & a^2 & a^3 \\ a-1 & a & -1 & a-1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a+1 & 1 \\ 0 & a & -a & a^3 - a \\ 0 & a & -a^2 & 0 \end{array}\right)$$

Geval 1: $a = 0$. Als we $a = 0$ invullen in bovenstaande matrix, krijgen we:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Dit stelsel is oplosbaar, met oplossingsverzameling $\{(1-r, s, r) \mid r, s \in \mathbb{R}\}$.

Geval 2: $a \neq 0$. We delen de tweede en derde rij door a:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a+1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & a^2 - 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a+1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & a^2 - 1 \\ 0 & 0 & 1-a & 1-a^2 \end{array}\right)$$

Geval 2.1: $a = 1$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

De oplossingsverzameling is $\{(1-2r, r, r) \mid r \in \mathbb{R}\}$.

Geval 2.2: $a \neq 1$ **en** $a \neq 0$. We delen de derde rij door $1 - a$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a+1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & a^2 - 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1+a \end{array}\right)$$

Hier is er een unieke oplossing: $\{(-a^2 - 2a, a^2 + a, 1 + a)\}$.

Samenvatting.

a	*Opl*
$a = 0$	$\{(1-r, s, r) \mid r, s \in \mathbb{R}\}$
$a = 1$	$\{(1-2r, r, r) \mid r \in \mathbb{R}\}$
$a \neq 0, a \neq 1$	$\{(-a^2 - 2a, a^2 + a, 1 + a)\}$

Oefening 3. Beschouw de ruimte $\mathbb{R}^n$ en twee deelruimtes V en W. Bewijs dat

$$\dim(V+W)^\perp + \dim(V \cap W)^\perp =$$
$$\dim(V+V^\perp) - \dim(V \cap V^\perp) - \dim V + \dim(W+W^\perp) - \dim(W \cap W^\perp) - \dim W$$

Oplossing. In het rechterlid kennen we direct 4 termen: omdat $V \cap V^\perp = \{0\}$, zal $\dim(V \cap V^\perp) = 0$, en omdat $V + V^\perp = \mathbb{R}^n$, zal $\dim(V + V^\perp) = n$. Analoog voor W in plaats van V. Dus het gevraagde is equivalent met

$$\dim(V+W)^\perp + \dim(V \cap W)^\perp = 2n - \dim V - \dim W \tag{1}$$

We weten ook dat $\dim(V+W)^\perp = n - \dim(V+W)$, en dat $\dim(V \cap W)^\perp = n - \dim(V \cap W)$. Dus is (1) verder equivalent met

$$2n - \dim(V+W) - \dim(V \cap W) = 2n - \dim V - \dim W \tag{2}$$

Als we hierin de $2n$ wegschrappen, en vermenigvuldigen met -1, hebben we de gewone dimenstelling:

$$\dim(V+W) + \dim(V \cap W) = \dim V + \dim W \tag{3}$$

We weten dat dit klopt, dus klopt ook de gegeven gelijkheid.