Examen Analyse 2 : Oefeningen. (3 februari 2006) Reeks 4.

Noot : Bij dit examen is het gebruik van Maple 8 toegelaten.

1. Integralen

Beschouw de integralen

$$\int_0^{1/2} \frac{x}{(1-x^2)^4}dx,$$ functie plotten?

$$\int_0^{1} \frac{x}{(1-x^2)^4}dx,$$ manier om kontinu te [illegible]?

Beantwoord voor elk van beide de volgende vragen:

limiet berekenen met maple?

1. Is dit een eigenlijke integraal of een oneigenlijke integraal?
2. Als het een eigenlijke integraal is, wat is dan zijn waarde?
3. Als het een oneigenlijke integraal is, is hij dan convergent en zo ja, tot wat?
4. Als het een oneigenlijke integraal is, is hij dan divergent en zo ja, tot wat?

2. Fourierreeksen

Beschouw de functie f die bepaald is door

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x - x^2, & \forall x \in [0,2] \\ &= 0 & \forall x \in [-2,0[\end{aligned}$$

a. Geef de bijbehorende Fourierreeks met hoofdperiode 4.
b. Geef afzonderlijk de even en de oneven coefficienten van de reeksontwikkeling.
c. Convergeert de reeksontwikkeling tot de functie f in elk punt van $[0,2]$? Geef de reden waarom of waarom niet.

3. Meervoudige integralen.

Bereken de drievoudige integraal van de functie $f(x,y,z) = yz$ over het gebied Q bepaald door de voorwaarden:

$$x^2 + y^2 \leq 1, \; 0 \leq z \leq y.$$

4. Oplossing van een differentiaalvergelijking

Los de volgende differentiaalvergelijking op

$$(x+y)y' = x - y, \; y(1) = 0$$

1. Integralen.

a. De substitutieregel voor integratie zegt het volgende:

Als :

$$\begin{aligned}&\Phi \in \mathcal{C}^1(J,\mathbb{R})\\ &f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})\\ &\Phi(J) \subseteq I, I \text{ en } J \text{ intervallen van } \mathbb{R}\\ &(a,b) \in J^2\end{aligned}$$

Dan :

$$\int_a^b f(\Phi(x))D\Phi(x)dx = \int_{\Phi(a)}^{\Phi(b)} f(x)dx$$

Bewijs deze regel.

b. Geef primitieven van de volgende functies:

1. $\frac{1}{1+x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$
2. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(x \in]-1,+1[)$

2. Rijen en reeksen van reële functies.

a. Geef de definitie van gelijkmatige convergentie van een rij functies gedefinieerd op eenzelfde verzameling.

b. Bewijs dat de limietfunctie van een gelijkmatig convergente rij van continue functies continu is in het convergentiegebied.

3. Gewone differentiaalvergelijkingen.

Beschouw een normale differentiaalvergelijking van eerste orde van de vorm

$$y' = f(x,y).$$

a. Wanneer zegt men dat deze vergelijking gescheiden veranderlijken heeft?

b. Wat weet men a priori over het bestaan van de oplossingen van een dergelijke vergelijking met gescheiden veranderlijken?

c. Geef de integratietechniek voor het oplossen van dergelijke vergelijkingen met gescheiden veranderlijken.

4. Partiële differentiaalvergelijkingen.

Beschouw de eendimensionale golfvergelijking:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \tag{1}$$