Examen Kwantummechanica: 23 januari 2006

OEFENINGEN

BIJ HET OPLOSSEN VAN HET OEFENINGENGEDEELTE MOGEN ENKEL DE CURSUSNOTA'S EN HET HANDBOEK "QUANTUM MECHANICS" VAN BRANSDEN EN JOACHAIN GEBRUIKT WORDEN.

OEFENING 1 (10 PUNTEN)

Een deeltje beweegt in een potentiaal gegeven door:

$$V(x) = \begin{cases} 0 \ , & -a \le x \le a \\ +\infty \ , & \mid x \mid > a \ , \end{cases}$$

en wordt op het tijdstip $t = 0$ in een toestand gebracht die beschreven wordt door de volgende golffunctie:

$$\Psi(x, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\psi_{E_1}(x) + \psi_{E_2}(x) \right) \ ,$$

waarbij $\psi_{E_1}(x)$ de golffunctie is horend bij de grondtoestand en $\psi_{E_2}(x)$ de golffunctie bij de eerste aangeslagen toestand.

1. Bepaal de golffunctie $\Psi(x, t)$ van het deeltje op een arbitrair tijdstip t. Kan $\Psi(x, t)$ een *stationaire toestand* genoemd worden? Verklaar je antwoord.

2. Noem $P_+(t)$ de probabiliteit dat het deeltje zich op tijdstip t in het interval $0 \le x \le a$ bevindt. Analoog, $P_-(t)$ is de probabiliteit dat het deeltje zich op tijdstip t in het interval $-a \le x \le 0$ bevindt. Bereken $P_+(t)$ en $P_-(t)$.

3. Bereken
$$\frac{dP_+(t)}{dt} \ \text{en,} \ \frac{dP_-(t)}{dt} \ ,$$
en bespreek je resultaat.

4. Toon aan dat
$$\frac{dP_-(t)}{dt} + j(x = 0, t) = 0 \ ,$$

waarbij $j(x, t)$ de waarschijnlijkheidsstroomdichtheid is. Wat is de fysische betekenis van de bovenstaande relatie tussen de tijdsafhankelijkheid van $P_-(t)$ en $j(x = 0, t)$?

OEFENING 2 (10 PUNTEN)

We beschouwen een tweedimensionale harmonische oscillator

$$\widehat{H} = \frac{\widehat{p_x}^2}{2m} + \frac{\widehat{p_y}^2}{2m} + \frac{1}{2}k\left(x^2 + y^2\right) \ .$$

Introduceer de creatie- en annihilatie-operatoren $\widehat{a}^\dagger$ en $\widehat{a}$ voor de x-richting

$$\widehat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/2} x - i\frac{\widehat{p_x}}{(m\hbar\omega)^{1/2}}\right] \ ,$$

en analoge operatoren $\widehat{b}^\dagger$ en $\widehat{b}$ voor de y-richting.

1. Geef de uitdrukking voor de Hamiltoniaan van een tweedimensionale harmonische oscillator in termen van creatie- en annihilatie-operatoren.

2. Bepaal het energie-eigenwaardespectrum van de tweedimensionale harmonische oscillator. Is er hier sprake van ontaarding? Beargumenteer je antwoord.

3. Toon aan dat de eigenfuncties van de tweedimensionale harmonische oscillator $\psi(x, y)$ geschreven kunnen worden als een product van $\psi_n(x)$ en $\psi_m(y)$, waarbij $\psi_n(x)$ en $\psi_m(y)$ eigenfuncties zijn van de ééndimensionale harmonische oscillator.

4. De z-component van de baanimpulsmomentoperator wordt gegeven door

   $$\widehat{L_z} = \widehat{x}\widehat{p_y} - \widehat{y}\widehat{p_x} \ .$$

   Schrijf deze operator in termen van $\widehat{a}, \widehat{a}^\dagger, \widehat{b}$ en $\widehat{b}^\dagger$. Is de operator die je nu bekomt een Hermitische operator?

5. Toon nu aan dat de ket

   $$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\widehat{a}^\dagger \left|E_0\right\rangle - i\widehat{b}^\dagger \left|E_0\right\rangle\right] \ ,$$

   een eigenvector is van de operator $\widehat{L_z}$. Bepaal ook de overeenkomstige eigenwaarde. In de bovenstaande uitdrukking staat de ket $\left|E_0\right\rangle$ voor de grondtoestand van de tweedimensionale harmonische oscillator.