Lineaire Algebra en Analytische Meetkunde

Eerste Bachelor Wiskunde
Eerste Bachelor Fysica en Sterrenkunde — 3 februari 2006

Theorie

1. Als V_1 en V_2 deelruimten zijn van de vectorruimte $\mathbb{R}^n$, dan geldt

$$\dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) = \cdots$$

   Bewijs deze stelling.

2. Voor elke lineaire afbeelding $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ geldt:

$$\dim(\ker f) + \dim(\mathrm{Im} f) = \cdots$$

   Bewijs deze stelling.

3. (a) De loodlijn uit een punt $p_0(\vec{r}_0)$ op de rechte bepaald door het punt $p_1(\vec{r}_1)$ en de richtingsvector $\vec{u}$.
   Bepaal de afstand van punt p_0 tot die rechte op twee manieren in de driedimensionale ruimte.

   (b) Welke zijn de niet-ontaarde kwadrieken met een (en dus één) dubbelpunt; geef hun standaardvergelijkingen en de coördinaten van het dubbelpunt.

   (c) Welke zijn de niet-ontaarde kwadrieken met één of met twee reële beschrijvenden in het vlak op oneindig? Geef hun standaardvergelijkingen en de vergelijkingen van die beschrijvenden.

   (d) Kan een reëel vlak een hyperbolische paraboloïde (zadeloppervlak) snijden volgens een (eventueel ontaarde) ellips (reëel of imaginair)? M.a.w. liggen op een zadeloppervlak ellipsen? Met uitleg! Waarom wel of waarom niet?
   Zelfde vraag voor een parabool: liggen op een zadeloppervlak parabolen?

Lineaire Algebra en Analytische Meetkunde
Examen oefeningen
1e bachelor wiskunde / 1e bachelor fysica en sterrenkunde
Academiejaar 2005–2006 — eerste examenperiode

- Schrijf op elk antwoordblad duidelijk je naam en studierichting.
- Er zijn 2 oefeningen, die in gelijk welke volgorde opgelost mogen worden.
- Gelieve de oefeningen en de theorie op aparte bladen in te dienen.
- Na dit examen zullen de antwoorden op Minerva (`https://minerva.ugent.be/`) worden gezet.

Oefening 1. Beschouw de kwadriek met als vergelijking

$$x^2 - 3y^2 + z^2 - 10xz - 6y - 48z = 30$$

Toon aan dat dit een hyperboloïde is. Is het een éénbladige of tweebladige?

Oefening 2. Definieer de lineaire afbeelding α als volgt:

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R}_1[x] &\to \mathbb{R}_2[x] \\ f(x) &\mapsto (x-2)f(x) \end{aligned}$$

We hebben als standaardbasissen $\{x, 1\}$ in $\mathbb{R}_1[x]$ en $\{x^2, x, 1\}$ in $\mathbb{R}_2[x]$. We definiëren de nieuwe basissen $\{x+4, -x-2\}$ in $\mathbb{R}_1[x]$ en $\{x^2+x, x, 1\}$ in $\mathbb{R}_2[x]$.

Gevraagd:

1. De matrix A_α van α ten opzichte van de standaardbasissen.
2. De matrices voor de basisovergangen.
3. De matrix $\overline{A_\alpha}$ van α ten opzichte van de nieuwe basissen.