1ste Jaar Bachelor Wiskunde - groep 3

Examen Lineaire Algebra en Analytische Meetkunde II – Theorie

Academiejaar 2005-2006 – 1ste examenperiode

1. Geef de definitie van een projectieve ruimte en bewijs dat een affiene ruimte samen met zijn incidentiemeetkunde op oneindig hieraan voldoet.
2. Bewijs dat elk hypervlak van $\mathrm{AG}(n, K)$ beschreven kan worden door een lineaire vergelijking en omgekeerd dat elke lineaire vergelijking, deze is van een hypervlak.
3. Geef en bewijs een nodige en voldoende voorwaarde opdat twee symmetrische bilineaire vormen over $V(n, \mathbb{C})$ congruent.
4. Geef een definitie van een symplectische basis van $V(2n, K)$ met een niet-singuliere alternerende vorm en bewijs dat zo een basis steeds bestaat.

Lineaire Algebra en Analytische Meetkunde II	
	Examen oefeningen
Eerste Bachelor Wiskunde	Prof. Dr. F. De Clerck
Eerste zittijd 2005-2006	Dr K. Thas

Opgave 1 *Beschouw de n-dimensionale projectieve ruimte* $\mathbf{PG}(n,q)$ *over het eindig veld* $\mathbf{GF}(q)$, $n \geq 2$.

(a) *Hoeveel vlakken gaan door een punt?*

(b) *Hoeveel vlakken gaan door een rechte?*

(c) *Stel dat* $\mathbf{PG}(n-2,q)$ *een* $(n-2)$*-dimensionale deelruimte is, en* x *een punt van* $\mathbf{PG}(n-2,q)$. *Hoeveel vlakken van* $\mathbf{PG}(n,q)$ *bevatten* x *en hebben met* $\mathbf{PG}(n-2,q)$ *precies* x *gemeen?*

Opgave 2 *Onderstel dat* f *een niet-singuliere reflexieve bilineaire vorm is over* $V = V(n,\mathbb{K})$, *met* $\mathbb{K}$ *een veld* ($\mathrm{Kar}(K) \neq 2$). *Beschouw een niet-singuliere lineaire deelruimte* U *van* V. *Aangezien* $V = U \bigoplus U^{\perp}$, *is elke vector* v *van* V *uniek te schrijven als* $v = u + w$, *met* $u \in U$, $w \in U^{\perp}$. *We kunnen de orthogonale projectie op* U *als volgt definiëren:*

$$\theta_U \ : \ V \to U \ ; \ \theta_U(v) = u.$$

Beschouw een bilineaire ruimte (V,f), *met* $V = V(4,\mathbb{K})$. *In verband met de reflexieve bilineaire vorm* f *en de basis* $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ *van* V *wordt gegeven:* e_1 *en* e_4 *zijn isotroop, de norm van* e_3 *is 1 en* e_2 *is orthogonaal met* $\langle e_3, e_4 \rangle$. *Tevens is* e_3 *orthogonaal met de andere basisvectoren. Verder geldt dat* $f(e_1, e_4) = 1$ *en dat de determinant van* $m_B f$ *gelijk is aan 2.*

(a) *Bepaal* $m_B f$.

(b) *Bepaal de isotrope kegel van* (V,f). *Is de isotrope kegel een lineaire deelruimte van* V*? Verklaar je antwoord.*

Opgave 3 *Beschouw de affiene ruimte* $\mathbf{AG}(5,\mathbb{K})$ *over het veld* $\mathbb{K}$, *en een affien referentiesysteem* $\mathbf{R} = (o, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4}, \vec{e_5})$. *De affiene coördinaten ten opzichte van* $\mathbf{R}$ *van* p_1, p_2, p_3, p_4 *en* p_5 *zijn respectievelijk*

$$p_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, p_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, p_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, p_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, p_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(*a*) *Bepaal het zwaartepunt van* $\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$. *Bestaat dit altijd?*

(*b*) *Bepaal wanneer precies* p_1, p_2, p_3, p_4 *en* p_5 *affien onafhankelijk zijn.*

(*c*) *Bepaal de barycentrische coördinaten van* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *ten opzichte van* (p_1, p_2, p_3, p_4).