Examen Kwantummechanica: 04/09/2006

THEORIE

Antwoord bondig en gevat !

1. VRAAG 1 (10 PUNTEN)

   We beschouwen een ééndimensionale potentiaal en twee oplossingen $\psi_1(x)$ en $\psi_2(x)$ van de tijdsonafhankelijke Schrödingervergelijking horend bij dezelfde energie-eigenwaarde E.

   - Toon aan dat voor gebonden toestanden ($E < 0$) deze oplossingen noodzakelijk lineair afhankelijk zijn.
   - Toon aan dat voor ongebonden toestanden ($E > 0$) het mogelijk is twee lineair onafhankelijke oplossingen bij dezelfde energie-eigenwaarde te vinden.

   We beschouwen nu twee- en driedimensionale potentialen.

   - Toon aan dat bij een gegeven gebonden energie-eigenwaarde ($E < 0$) meerdere lineair onafhankelijke eigenfuncties kunnen voorkomen.

2. VRAAG 2 (20 PUNTEN)

   MONDELING EXAMEN

OEFENINGEN

BIJ HET OPLOSSEN VAN HET OEFENINGENGEDEELTE MOGEN ENKEL DE CURSUSNOTA'S EN/OF HET HANDBOEK "QUANTUM MECHANICS" VAN BRANSDEN EN JOACHAIN GEBRUIKT WORDEN.

OEFENING 1 (10 PUNTEN)

Beschouw een vrij deeltje met massa m in één dimensie. Maak gebruik van de uitdrukking

$$i\hbar \frac{d\left\langle \widehat{A} \right\rangle}{dt} = \left\langle \left[\widehat{A}, \widehat{H} \right] \right\rangle + i\hbar \left\langle \frac{\partial \widehat{A}}{\partial t} \right\rangle$$

voor de tijdsafhankelijkheid van de verwachtingswaarde van een operator $\widehat{A}$ om aan te tonen dat

- $$\frac{d\left\langle \widehat{x} \right\rangle}{dt} = \frac{\left\langle \widehat{p}_x \right\rangle}{m}$$

- $$\left\langle \widehat{p}_x \right\rangle_t = \left\langle \widehat{p}_x \right\rangle_{t=0}$$

- Bereken door herhaald toepassen van de bovenstaande uitdrukking voor de tijdsafhankelijkheid van de verwachtingswaarde van een operator (dus NIET de expliciete uitdrukking voor de golffunctie gebruiken) de tijdsafhankelijkheid van $(\Delta x)^2$

  $$(\Delta x)^2 = \left\langle (x - \langle x \rangle)^2 \right\rangle = \left\langle x^2 \right\rangle - \langle x \rangle^2 \ .$$

  De finale uitdrukking is

  $$(\Delta x)_t^2 = (\Delta x)_{t=0}^2 + \frac{(\Delta p_x)_t^2}{m^2} t^2 + \frac{1}{m} \left\langle \widehat{x}\widehat{p}_x + \widehat{p}_x\widehat{x} \right\rangle_t \ t - \frac{2}{m} \left\langle \widehat{x} \right\rangle_t \left\langle \widehat{p}_x \right\rangle_t \ t$$

  Bij de analytische berekeningen in deze oefening kun je de volgende gelijkheid nuttig vinden

  $$\int_{t=0}^{t} dt \ \left\langle \widehat{A} \right\rangle_t = t \left\langle \widehat{A} \right\rangle_t \Big|_{t=0}^{t} - \int_{t=0}^{t} dt \ t \ \frac{d\left\langle \widehat{A} \right\rangle}{dt} \ .$$

- Als een speciaal geval van de bovenstaande uitdrukking voor $(\Delta x)^2$: bespreek de situatie van een minimale-onzekerheidsgolfpakket waarvoor:

  $$(\Delta x)\,(\Delta p_x) = \frac{\hbar}{2} \ .$$

OEFENING 2 (10 PUNTEN)

Een deeltje in een ééndimensionale harmonische oscillator bevindt zich op $t = 0$ in de toestand

$$\Psi(x,0) = A\Big(3\psi_0(x) + 4\psi_1(x)\Big)$$

1. Bepaal de constante A.
2. Als men de energie van dit deeltje meet, welke waarden kan men dan vinden en met welke waarschijnlijkheid?
3. Construeer $\Psi(x,t)$ en $|\Psi(x,t)|^2$.
4. Bereken $\langle x \rangle$ en $\langle p_x \rangle$ en toon aan dat wel degelijk voldaan is aan het Ehrenfest theorema
$$\frac{d\langle p_x \rangle}{dt} = \left\langle -\frac{dV(x)}{dx} \right\rangle \ .$$

Bij de analytische berekeningen in deze oefening kun je de volgende integraal nuttig vinden

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\ x^2\ \exp\left(-ax^2\right) = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\ .$$