1ste bachelorjaar wiskunde

Examen Lineaire Algebra en Analytische Meetkunde II – Theorie

Academiejaar 2005 – 2006 – 2de examenperiode

1. Geef de definitie van een dilatatie in $AG(n, K)$ en bewijs dat elke dilatatie ofwel een translatie ofwel een homothetie is. Bespreek de samenstellingen van homothetieën.
2. Geef en bewijs de stelling van Menelaos.
3. Hoeveel lineaire vergelijkingen heeft men minimaal nodig om een affiene variëteit van dimensie m te beschrijven in een affiene ruimte $AG(n, K)$ (verklaar uw antwoord).
4. Geef en bewijs de invloed van basisovergangen in de vectorruimten $V(n, K)$ en $W(m, K)$ voor de matrixvoorstelling van een bilineaire vorm f van $V \times W$ naar K.

?

Lineaire Algebra en Analytische Meetkunde II	
	Examen oefeningen
Eerste Bachelor Wiskunde	Prof. Dr. F. De Clerck
Tweede zittijd 2005-2006	Dr. K. Thas

Opgave 1 *Beschouw de n-dimensionale projectieve ruimte $\mathbf{PG}(n,q)$ over het eindig veld $\mathrm{GF}(q)$, $n \geq 4$, en onderstel dat $\Pi = \mathbf{PG}(n-2,q)$ een $(n-2)$-dimensionale deelruimte is.*

(a) *Stel dat α een deelruimte is van $\mathbf{PG}(n,q)$ van maximale dimensie met de eigenschap dat $\alpha \cap \Pi = \emptyset$. Wat is deze dimensie?*

(b) *Stel dat β een vlak is in Π. Hoeveel vlakken zijn er die α in tenminste twee verschillende punten snijden en β in geen enkel punt?*

(c) *Stel dat γ een vlak is dat tenminste twee verschillende punten bevat van α. Hoeveel vlakken bevat Π die γ niet snijden?*

Opgave 2 *Beschouw een niet-singuliere bilineaire vorm F over een vectorruimte $V = V(n, \mathbb{K})$ met $\mathbb{K}$ een veld van oneven karakteristiek. Beschouw een niet-isotrope vector v en stel dat θ_v de orthogonale projectie is van V op het hypervlak $\langle v\rangle^{\perp}$, en dat δ_v de orthogonale spiegeling is van V ten opzichte van $\langle v\rangle^{\perp}$.*

(a) *Toon aan dat $\theta_v^2 = \theta_v$.*

(b) *Toon aan dat $\delta_v^2 = 1$.*

(c) *Druk δ_v uit in functie van θ_v.*

(d) *Bepaal alle vectoren die door θ_v op eenzelfde (niet-nul) vector w afgebeeld worden.*

Opgave 3 *Beschouw de affiene ruimte $\mathbf{AG}(4, \mathbb{K})$ over het veld $\mathbb{K}$, en een affien referentiesysteem $\mathbf{R} = (o, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4})$. De affiene coördinaten ten opzichte van $\mathbf{R}$ van p_1, p_2, p_3 en p_4 zijn respectievelijk*

$$p_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \ p_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ p_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ p_4 \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix},$$

waarbij $k \in \mathbb{K}$.

(a) *Bepaal het zwaartepunt van* $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$. *Bestaat dit altijd?*

(b) *Bepaal wanneer precies* p_1, p_2, p_3 *en* p_4 *affien onafhankelijk zijn.*

(c) *Bepaal de barycentrische coördinaten van* $\begin{pmatrix} 4-3k \\ 7 \\ 10 \\ 13-3k \end{pmatrix}$ *ten opzichte van* (p_1, p_2, p_3, p_4).

Opgave 2 *Beschouw een niet-singuliere reflexieve bilineaire ruimte* (V, f), *met* $V = V(4, \mathbb{K})$. *In verband met de reflexieve bilineaire vorm* f *en de basis* $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ *van* V *wordt gegeven:* e_1 *en* e_4 *zijn isotroop, de norm van* e_3 *is 1 en* e_2 *is orthogonaal met* $\langle e_3, e_4\rangle$. *Tevens is* e_3 *orthogonaal met de andere basisvectoren. Verder geldt dat* $f(e_1, e_4) = 1$ *en dat de determinant van* $m_B f$ *gelijk is aan* 2.

(*a*) *Bepaal* $m_B f$.

(*b*) *Bepaal de isotrope kegel van* (V, f). *Is de isotrope kegel een lineaire deelruimte van* V*? Verklaar je antwoord.*

Oplossing

(a)

$$m_B f = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 & 1 \\ k & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

met $k \in \mathbb{K}$.

(b) De isotrope kegel wordt bepaald door de oplossingen $(x, y, z, v)^T$ van de volgende vergelijking:

$$-2y^2 + z^2 + 2kxy + 2vx = 0.$$

Aangezien $(1, 0, 0, 0)^T$ en $(0, 0, 0, 1)^T$ in de isotrope kegel bevat zijn, maar hun som niet, is deze kegel geen deelruimte.

Opgave 3 *Beschouw de affiene ruimte* $\mathbf{AG}(5, \mathbb{K})$ *over het veld* $\mathbb{K}$, *en een affien referentiesysteem* $\mathbf{R} = (o, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4}, \vec{e_5})$. *De affiene coördinaten ten opzichte van* $\mathbf{R}$ *van* p_1, p_2, p_3, p_4 *en* p_5 *zijn respectievelijk*

$$p_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, p_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, p_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, p_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, p_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(*a*) *Bepaal het zwaartepunt van* $\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$. *Bestaat dit altijd?*

(*b*) *Bepaal wanneer precies* p_1, p_2, p_3, p_4 *en* p_5 *affien onafhankelijk zijn.*

(*c*) *Bepaal de barycentrische coördinaten van* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *ten opzichte van* (p_1, p_2, p_3, p_4).

Oplossing

(a) Het zwaartepunt wordt gegeven door

$$\frac{p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5}{5} = \begin{pmatrix} 6/5 \\ 2/5 \\ 2/5 \\ 1/5 \\ 1/5 \end{pmatrix},$$

en bestaat als en slechts als de karakteristiek van $\mathbb{K}$ verschillend is van 5.

(b) Deze vectoren zijn affien onafhankelijk als en slechts als $\overrightarrow{p_1p_2}, \overrightarrow{p_1p_3}, \overrightarrow{p_1p_4}, \overrightarrow{p_1p_5}$ lineair onafhankelijk zijn. Van de 5×4-matrix waarvan de kolommen bestaan uit deze vectoren, is de volgende matrix een minor:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Aangezien de determinant -1 is, zijn de gegeven vectoren altijd affien onafhankelijk.

(c) De barycentrische coördinaten worden gegeven door $(-1, 1, 1, 0)$.