Voorbeeld theorie examen

Het schriftelijk examen over de theorie en de oefeningen heeft plaats op 27 juni van 8u30 t/m 13u.
1 uur en 30 minuten zijn voorzien voor het theorie examen. De vragen zijn gericht op het testen van je ***inzicht*** in de belangrijkste concepten van de lineaire algebra. Je kan zowel voor theorie als voor het oefeningen gedeelte nota's gebruiken. (*Het is een open boek examen over de ganse lijn.*)
Let op! De tijd is beperkt als je de definities van de begrippen niet kent en deze op het examen nog moet opzoeken zal het niet mogelijk zijn de vragen op te lossen binnen de voorziene tijd. **Zorg dat je de definities van de begrippen kent en begrijpt (je moet goede voorbeelden kunnen geven van de begrippen die je definieert).**

Zoals het voorbeeld examen zal het theorie examen bestaan uit drie vragen (met onderverdelingen). Eén vraag over het stuk matrices, determinanten en lineaire stelsels (les 2, les 3, les 4), één vraag over vectorruimten, inproductruimten en lineaire afbeeldingen (les 5, les 6, les 7, les 8 met inbegrip van de Euclidische bewegingen) en één vraag over lineaire operatoren en eigenwaarden (les 9 met inbegrip van de spectraalstellingen en de klassificatie van kegelsneden en kwadrieken). Wat we over getallen gezegd hebben (les 1) is ook belangrijk en kan in alle vragen aanbod komen. (Uiteraard $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$.)

Er zullen op het examen hoogstens drie onderverdelingen zijn per vraag. Het antwoord op het eerste onderdeel kan in de nota's gevonden worden. Het antwoord op het tweede onderdeel staat misschien niet letterlijk in de nota's maar houdt direct verband met eigenschappen die in de nota's behandeld worden. Los deze vragen eerst op!
Het laatste onderdeel (met de aanduiding (*)) gaat wat dieper, je moet bv. een verband leggen tussen verschillende dingen.

Voorbeeld examen met antwoorden.

Op elke vraag zijn verschillende goede antwoorden mogelijk. We geven hier enkel *mogelijke* antwoorden. De antwoorden die we geven zijn voor sommige vragen ook wat uitgebreider dan nodig zodat we de theorie nog wat kunnen verduidelijken.
Bij het osptellen van de vragen voor het examen zelf wordt natuurlijk rekening gehouden met de tijd (ongeveer 1u30) die je hebt om het theorie examen te doen.

1. (a) Geef de karakteristieke eigenschappen die de determinant definiëren. Illustreer de eigenschappen met voorbeelden van 3×3-matrices.

De determinant van de eenheidsmatrix is gelijk aan 1.
vb.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 = 1.$$

(We gebruiken ontwikkeling naar een kolom of rij omdat op die manier bewezen wordt dat een determinant bestaat.)
De determinant is lineair in de rijen van de matrix.
vb.

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{21} + \mu b_{21} & \lambda a_{22} + \mu b_{22} & \lambda a_{23} + \mu b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$\lambda \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \mu \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

De determinant van een matrix met 2 gelijke rijen is nul.
vb.

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{11} + a_{13}a_{21}a_{12} - a_{11}a_{23}a_{12} - a_{12}a_{21}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{11} = 0$$

(We gebruiken de formule bladzijde 56.)

(b) Zij A een $n \times n$-matrix, $\det A \neq 0$. Dan is de rij-echelon vorm van A de eenheidsmatrix. *Verklaar dit!*

Verklaar dit door gebruik te maken van de eigenschappen van matrices en determinanten uit les 2 en les 3.
Alternatief: Verklaar dit door gebruik te maken van de eigenschappen van stelsels vergelijkingen.

Als de rij -echelon vorm van een vierkante matrix niet gelijk is aan de eenheidsmatrix dan is de laatste rij een nul-rij (zie blz. 42). Een matrix met een nul-rij heeft determinant 0. Dit is in tegenspraak met de onderstelling.

(*Alternatief*) Als $\det A \neq 0$ dan heeft een stelsel $AX = B$ een unieke oplossing (zie pagina 77). De rij -echelon vorm is dan een eenheidsmatrix (zie blz. 74).

(*)(c) Wat is het verband tussen een antisymmetrisch inproduct op een 2-dimensionale ruimte en de determinant van 2×2-matrices.

Zij $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ de coördinaten van vectoren v, w in een 2-dimensionale inproductruimte over K. Dan definieert het in product een afbeelding

$$\tilde{d} : M_2(K) \to K; \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \mapsto \langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \rangle.$$

Deze afbeelding is lineair in de kolommen van de matrix (dit volgt uit de bilineariteit van het inproduct) en als de kolommen gelijk zijn is de waarde gelijk aan nul (als de karakteristiek van het veld niet gelijk is aan 2):

$$\tilde{d} \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \rangle = -\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \rangle = 0.$$

Dus onder de voorwaarde dat de karakteristiek van het veld niet gelijk is aan 2 dan is de afbeelding $\tilde{d}$ op een scalair veelvoud na gelijk aan de determinant. Namelijk als

$$\tilde{d} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \lambda$$

dan voldoet $\lambda^{-1}\tilde{d}$ aan de definiërende eigenschappen van de determinant.

2. (a) De dimensie van een vectorruimte V over een veld K is het aantal elementen van een basis. Waarom is dit goed gedefinieerd?

Omdat elke basis in een eindig dimensionaleruimte evenveel elementen heeft. (Eigenschap (j) bladzijde 94).

(b) Zij V, W vectorruimten over K. Een lineaire afbeelding $F : V \to W$ is injectief als en slechts als een lineair onafhankelijk stel afgebeeld wordt op een lineair onafhankelijk stel. Verklaar!

Zij $v_1, \ldots, v_m$ een lineair onafhankelijk stel in V. En

$$\lambda_1 F(v_1) + \cdots + \lambda_n F(v_m) = 0$$

een lineaire combinatie van de beelden van deze elementen onder F. Dan is

$$F(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_m) = \lambda_1 F(v_1) + \cdots + \lambda_n F(v_m) = 0$$

vermits F een lineaire afbeelding is.
Als F injectief is volgt dat $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m = 0$ en dus (vermits de v_i's een lineair onafhankelijk stel vormen) $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$. Dit impliceert per definitie dat $F(v_1), \ldots, F(v_m)$ een lineair onafhankelijk stel is.
Omgekeerd. Stel dat F een lineair onafhankelijk stel van V afbeeldt op een lineair onafhankelijk stel in W. Neem $v_1, \ldots, v_m$ een basis voor V. En $v \in \ker F$. Dan is $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$ en $0 = F(v) = \lambda_1 F(v_1) + \cdots + \lambda_n F(v_n)$. Dit impliceert dat $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ vermits de hypothese impliceert dat de elementen $F(v_1), \ldots, F(v_n)$ lineair onafhankelijk zijn in W. Dus $v = 0$. We hebben aangetoond dat de kern van F de nulruimte. Stel nu $F(v) = F(v')$ dan is dus $F(v - v') = 0$ wat $v - v' \in \ker F$ geeft. Besluit $v - v' = 0$ en dus $v = v'$. F is dus injectief.

(c) Pas het Gram-Schmidt orthogonalisatie algoritme toe op

$$(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$$

(met op $\mathbb{R}^3$ het standaard inproduct $X^t Y$). Welke vectoren bekom je? (Verklaar!)
Je bekomt de vectoren $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$
Dat je vectoren $(1, 0, 0), (0, a, 0), (0, 0, b)$ bekomt zie je als volgt. De rechte in het vlak opgespannen door $(1, 0, 0), (1, 1, 0)$ die loodrecht staat op de eerste vector is de rechte die bestaat uit de vectoren $(0, a, 0)$. De rechte die loodrecht staat op het vlak span($\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$) bestaat uit de vectoren $(0, 0, b)$.
Dat a, b gelijk zijn aan 1 volgt uit het feit dat de 2de coördinaat van de 2de vector en de 3de coördinaat van de 3de vector gelijk is aan 1.
Zo werkt immers het Gram-Schmidt algorithme!

(*)(d) Wat gebeurd er als je het Gram-Schmidt algoritme toepast op een lineair afhankelijk stel?
Als de vectoren $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ lineair afhankelijk zijn dan is er een "eerste" vector e'_i die lineair afhankelijk is van $e'_1, \ldots, e'_{i-1}$.
Stel $\{e_1, \ldots, e_{i-1}\}$ zijn de orthognale vetoren door de Gram-Schmidt procedure toe te passen op $e'_1, \ldots, e'_{i-1}$. Dan is e'_i een lineaire combinatie van deze vectoren vermits span$(\{e'_1, \ldots, e'_{i-1}\})$ = span$(\{e_1, \ldots, e_{i-1}\})$ en wel

$$e'_i = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{g(e'_j, e_j)}{g(e_j, e_j)} e_j$$

(met g het inproduct.) De Gram-Schmidt procedure geeft:

$$e_i = e'_i - (\sum_{j=1}^{i-1} \frac{g(e'_j, e_j)}{g(e_j, e_j)} e_j) = 0.$$

Dus de Gram-Schmidt procedure toepassen op een lineair afhankelijk stel geeft een stel dat de nul vector bevat!

3. (a) Illustreer het eigenwaarde probleem met een voorbeeld.
We hebben verschillende voorbeelden in de lessen (theorie en oefeningen) gezien. Hier een variant op het voorbeel dat in de theorie les besproken werd.
Vijf biljarters spelen een competitie waarin elke speler tweemaal tegen elke andere speler speelt. De "ranking" van een speler is evenredig met de "ranking" van elke speler waarvan hij gewonnen heeft. Bijvoorbeeld:

$$\lambda w_1 = w_2 + 2w_3$$

speler 1 heeft 1 keer gewonnen van speler 2 en 2 keer gewonnen van speler 3 (λ is de evenredigheidsfactor). Voor de andere hebben we

$$\begin{aligned}
\lambda w_1 &= w_2 + 2w_3 \\
\lambda w_2 &= w_1 + w_3 + w_4 \\
\lambda w_3 &= w_2 + w_5 \\
\lambda w_4 &= 2w_1 + w_2 + 2w_3 \\
\lambda w_5 &= 2w_1 + 2w_2 + w_3 + 2w_4
\end{aligned}$$

In matrix vorm

$$\lambda \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{pmatrix}.$$

De "rankingvector" is dus een eigenvector voor de matrix, het beeld van de vector onder de lineaire transformatie bepaald door de matrix is namelijk evenredig met de vector. (Dit komt doordat de definitie van de waarde een zelfreferentie bevat (bv. de waarde van speler hangt af van de waarde van speler 2 en deze laatste waarde hangt zelf af van die van speler 4).
Je kan met maple het probleem oplossen je zal de niet onverwachte "ranking": speler 5, speler 4, speler 2, speler 3, speler 1 vinden.

(b) Zij A een $n \times n$-matrix over een veld K en $P \in GL_n(K)$. Als PAP^{-1} een diagonaalmatrix is dan heeft A een stel van n lineair onafhankelijke eigenvectoren. Verklaar!
De vectoren

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

van een standaard basis vormen een basis van eigenvectoren voor de diagonaalmatrix PAP^{-1}. Uit

$$A(P^{-1}e_i) = P^{-1}(PAP^{-1})e_i = \lambda_i(P^{-1}e_i)$$

volgt dat de vectoren $P^{-1}e_i$ eigenvectoren zijn voor de matrix A. Ze zijn lineair onafhankelijk omdat P^{-1} een inverteerbare matrix is (dus hoort bij een bijectieve lineaire afbeelding, zie stelling 7.4).

(c) Zij A een reële symmetrische $n \times n$-matrix dan heeft A een basis van eigenvectoren. Verklaar!

Er is een orthogonale matrix P zodat PMP^t een diagonaalmatrix over $\mathbb{R}$ is (zie slides - spectraalstellingen). Vermits $PP^t = I_n$ volgt dat M diagonaliseerbaar is over $\mathbb{R}$. Dit impliceert dat A een basis heeft van eigenvectoren (zie punt (b) van deze vraag).

(*)(d) Zij A een 2×2-matrix over K zodat $\chi_A(x) = (x - \lambda)^2$. Dan is A diagonaliseerbaar als en slechts als $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Verklaar!

Als A diagonaliseerbaar is dan is er een $P \in GL_2(K)$ zodat

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

met $\chi_A(\lambda_i) = 0$. Dus $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.
Dit geeft

$$A = P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

waarbij de laatste gelijkheid volgt uit het feit dat $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ commuteert met elke 2×2 matrix.